



青年科学家著作丛书

张耀中 著

反常规范理论导论

吉林科学技术出版社

350114

青年科学家著作丛书

反常规范理论导论

张耀中 著



吉林科学技术出版社

青年科学家著作丛书
反常规范理论导论

张耀中 著

责任编辑：张瑛琳

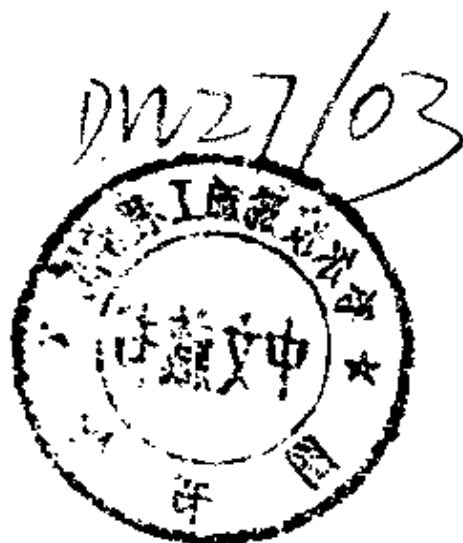
封面设计：杨玉中

出版	吉林科学技术出版社	850×1168毫米32开本	5.875印张
发行		插页4	140 000字
		1990年4月第1版	1990年4月第1次印刷
		印数：1—1 180册	定价：4.00元
印刷	长春新华印刷厂	ISBN 7-5384-0505-4/O·28	

内 容 提 要

本书系统地阐述了反常规范理论的基础。内容包括：阿贝尔和非阿贝尔反常，自洽性条件，协变和自洽反常，对易子和Jacobi等式反常，反常Jacobi等式的约束，上同调与群表示，反常规范理论的自洽量子化等。

本书适用于高等院校物理和数学专业高年级学生、研究生；也可作为科研人员和高校教师的研究或教学参考书。



祖国的希望 未来的曙光

——寄语青年科技工作者

王大珩

翻开吉林科学技术出版社送来的《青年科学家著作丛书》书目及作者名单，一个个自强好学，勇于探索创新的青年人仿佛就在眼前，使我欣慰，感到后生有望。所以在《丛书》编辑出版之际，我很乐于借此机会，同广大青年科技工作者讲几句共勉的话。

这些年来，一大批在五星红旗下诞生，成长起来的年轻科技工作者崭露头角，在面向国民经济主战场的应用研究和在基础科学以及高技术研究等诸多方面取得优异成就，有的居于国际领先地位，或达到国际先进水平，有的填补国内空白，这些成果对推动科学技术进步，发展国民经济起到了重要作用。为鼓励青年科技工作者的科学研究和发明创造，中国科学技术协会、中国科学院分别设立了青年科技奖和青年科学家奖，规定每两年评选一次。首届青年科技奖评出 94 名，首届青年科学家奖评出 25 名，他们是从全国数以百万计的青年科技工作者中层层遴选出的佼佼者。

在此基础上，经过中国科协和中国科学院的推荐，吉林科学技术出版社编辑出版首届部分获奖者的著作，并获得长白山学术著作出版基金的资助，这对广大青年

科技工作者是很大的鼓舞。出版社关心青年科技工作者的成长是值得赞扬的。

当今，在激烈的国际竞争中，重要的是看一个国家的综合国力，而其中重要的一个方面是科学技术的进步，所以各国都把科学技术作为推动经济发展和社会进步的重要手段。我国是一个拥有十一亿人口的大国，经济还很落后。但是我们有志气、有能力振兴中华，立足于世界民族之林。实现这样的宏愿，要靠我们几代人的艰苦奋斗。中国科学技术的兴旺发达要靠我们老中青科技工作者团结合作，但归根到底要靠你们青年人。长江后浪推前浪，一代更比一代强。党和人民把国家的前途、民族的命运寄托在你们青年人身上，正如江泽民同志所说：“你们是祖国希望所在，是中国未来的曙光。”

我们这些人都已年逾古稀，要你们接好班，要有理想、有志气。一个人也好，一个民族也好，都要有一点精神，要有使命感，要有民族自强心，要为国家、为民族争口气，奋发向上，勇于进取；作为优秀的青年科技人才，除业务上有突出成就外，还要有不计名利、无私奉献的高尚精神，现在尤其要提倡这种精神，还要有求实的科学态度，尊重知识，尊重他人的劳动；你们还要发扬中华民族的美德，那就是要有集体主义精神，要团结协作，自力更生，艰苦奋斗，不屈不挠地去拼搏，满怀希望，开拓未来！

1990年2月

前 言

我动笔写这本书的目的有两个：

一是较详细地评述近几年来发展起来的计算手征反常的非微扰论的方法和有关的数学概念。我希望我已经给出了比较完整的描述，以便帮助初学者能够通过阅读此书对反常规范理论有一个大概的了解，我也讨论了反常规范理论中还没有解决的问题。

二是我国有许多在反常理论方面做过大量一流工作的专家，他们是周光召，侯伯宇，郭汉英，王珮，宋行长，侯伯元，等等。我自己也在反常理论方面做了近三年的探讨。因此，我试图把我国科研人员在这方面的工 作尽量写进此书，使读者能认识到我国的科研工作者在反常理论方面的工作是喜人的。

作者在这里首先要感谢吉林科学技术出版社和长白山学术著作出版基金会使此书的出版成为可能。作者也感谢西北大学现代物理所赵宏毅副所长给予的许多鼓励和帮助，是侯伯宇教授指导作者进入反常理论这个领域的，在此我对他表示感谢，作者也感谢郭汉英，王珮教授的鼓励、关怀及许多有益的讨论；我还感谢侯伯元，宋行长教授的讨论。

张耀中

1989年3月于西北大学

目 录

第 1 章	引言	(1)
第 2 章	手征反常和它的路径积分推导	(3)
2.1	手征 $U_A(1)$ 反常	(3)
2.2	非阿贝尔反常	(8)
第 3 章	手征反常和它的微分几何构造	(15)
3.1	手征反常和自洽性条件	(15)
3.2	四维和高维阿贝尔反常的微分几何构造	(16)
3.3	非阿贝尔手征反常的微分几何构造	(18)
3.4	反常的变换性质	(21)
3.5	对称和非对称手征反常和 Wess-Zumino-Witten 作用量	(25)
3.6	反常的归一化常数	(30)
第 4 章	反常和李代数上同调系列	(32)
4.1	反常的递降方程	(32)
4.2	不确定性, 最简单的递降方程及“三角形” 公式	(35)
4.3	推广到非平庸主丛的情况	(40)
第 5 章	群上闭链及其在群表示论中的作用	(43)
5.1	规范群上同调及其与李代数上同调的联系	(43)
5.2	群上闭链在群表示论中的应用	(46)
第 6 章	反常和规范群上同调闭链	(54)
6.1	1-上闭链和 Wess-Zumino-Witten 项	(54)
6.2	2-上闭链和 Schwinger-Jackiw-Johnson 项	(56)
6.3	3-上闭链及其在 Hamiltonian 动力学中 的物理实现	(58)
6.4	不可结合代数和反常 Jacobi 等式的约束	(67)

第 7 章	2-上闭链与规范群的扩张.....	(72)
7.1	二维反常规范理论中的Kac-Moody 群.....	(72)
7.2	四维反常规范理论中的Kac-Moody群	(82)
第 8 章	反常与连络空间上同调	(85)
8.1	Chern-Simons类型的上同调.....	(85)
8.2	连络空间上同调与族指数定理.....	(91)
8.3	应用.....	(98)
第 9 章	反常的微扰论验证和代数推导	(108)
9.1	Bjorken-Johnson-Low (BJL)极限方法	(108)
9.2	反常的代数推导.....	(121)
9.3	递降方程的代数意义.....	(126)
第10章	协变反常	(129)
10.1	协变反常的路径积分推导	(129)
10.2	与协变反常对应的协变流	(131)
10.3	协变反常的上同调分析	(138)
第11章	反常规范理论的自洽量子化.....	(145)
11.1	引言	(145)
11.2	规范不变的方法	(146)
11.3	规范非不变的方法	(155)
第12章	结束语	(173)
参考文献		(175)

第 1 章

引 言

对称性原理在高能粒子物理中起着基本的作用。在经典理论中, Noether 定理保证了与对称性相应的流是守恒的。然而, 在我们处理有无穷多个自由度的量子理论时, 量子化的方法破坏一些基本的经典对称性。例如, 无质量费米子的连续手征对称性。结果, 在量子化后, 一些经典的对称性不能再维持; 与之对应的守恒流在量子化后不再守恒。这样的现象称为反常。

本书只讨论规范理论中经典手征对称性在量子化后的破坏, 即所谓的手征反常。它最早是由 Adler, Bardeen, Bell 和 Jackiw 在微扰论计算中发现的。尽管手征反常的发现解决了粒子物理中的许多重要问题, 如 QCD 中的 $U(1)$ 疑难, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 衰变, 夸克-轻子族的 GIM 机制, 等等, 但是那时对反常问题的研究发展缓慢。

直到近几年来, 人们发现手征反常具有深刻的拓扑根源, 对手征反常的研究才得到迅速发展。人们把微分几何、拓扑、

上同调论等现代数学工具用于对反常的研究。建立了反常理论的优美的数学体系并得到了许多重要的结果。例如反常与指数定理间的联系，反常与规范场轨道空间和规范群空间拓扑之间的联系等等。反常理论的这些优美的数学体系激励人们进一步寻找处理反常理论的新方法。甚至，近来人们提出了自洽地量子化一个反常理论的可能性。本书中我们将对近几年来发展起来的计算反常的非微扰方法做比较详尽的介绍。

手征反常出现于带 γ 耦合的量子理论中。它在手征规范理论中所起的作用是无法估量的。现在，反常已被用到了量子理论的各个领域：从固态物理到超弦。人们普遍相信反常是量子场论的一般和基本的性质。

我们假定读者学过量子场论、规范场论及群论等基本课程，并对现代数学，例如微分几何、上同调等的基本性质也有所了解。

第 2 章

手征反常和它的路径积分推导

2.1 手征 $U_A(1)$ 反常

手征 $U_A(1)$ 反常或称阿贝尔反常代表费米子路径积分测度在手征转动下的非不变性。我们考虑一耦合到费米子的 $SU(n)$ 杨-Mills理论, 其Minkowski时空中费米子部分拉氏量为

$$\mathcal{L}^F = \bar{\psi}_i \phi \psi \quad (2.1.1)$$

$$\phi = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \quad A_\mu = -it^a A_\mu^a$$

t^a 为 $SU(n)$ 的厄米生成元: $(t^a)^\dagger = t^a$, 它满足: $[t^a, t^b] = if^{ab}t^c$, ($f^{ab}c$ 为结构常数), $\text{tr} t^a t^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ 。 γ 矩阵满足

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \\ \gamma_5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

时空度规 $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 。 γ^0 是厄米的, γ^k ($k = 1, 2, 3$) 是反厄米的, γ_5 是厄米的。

作 Wick 转动: $x^0 \rightarrow -ix^4$, $A_0 \rightarrow iA_4$, 那么算子 $\phi = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$ 变成厄米算子

$$\phi = i\gamma^0 D_4 + \gamma^k D_k = \gamma^4 D_4 + \gamma^k D_k \quad (2.1.3)$$

度规张量变成 $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$, γ^μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) 矩阵变成反厄米的。这样我们得 Euclidean 空间路径积分

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(\int d^4x \mathcal{L}_F^E(x) \right) \quad (2.1.4)$$

$\mathcal{L}_F^E$ 是 $\mathcal{L}_F^M$ Wick 转动到 Euclidean 空间中的结果。在 Euclidean 空间中, $\bar{\psi}$ 与 ψ 是独立的。

在无穷小征 $U(1)$ 转动,

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta(x)\gamma_5} \psi(x) \quad (2.1.5)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\theta(x)\gamma_5} \quad (2.1.6)$$

下, 拉氏量变成

$$\mathcal{L}_F^E(x) \rightarrow \mathcal{L}_F^{E'}(x) = \mathcal{L}_F^E(x) - \partial_\mu \theta(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \quad (2.1.7)$$

$\partial_\mu \theta(x)$ 的系数定义了对称流。若费米测度 $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi$ 在 (2.1.5), (2.1.6) 下保持不变, 则我们有

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{S(\psi)} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' e^{S(\psi')} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{S(\psi')} \quad (2.1.8)$$

式中

$$S[\psi] = \int d^4x \mathcal{L}_F^E(x) \quad S[\psi'] = \int d^4x \mathcal{L}_F^{E'}(x)$$

把 (2.1.8) 式按 $\theta(x)$ 的幂次展开, 我们得朴素的等式

$$\partial_\mu \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \rangle = 0 \quad (2.1.9)$$

$\langle O(x) \rangle$ 表 $O(x)$ 在路径积分意义下的平均。

然而仔细考查一下便可知, 在转动 (2.1.5) 和 (2.1.6) 下, 费米测度 $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi$ 并非是不变的, 而是有一非零的 Jacobian

因子出现

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' = J[A]\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \quad (2.1.10)$$

这里 $J[A] = \exp(-i\int d^4x \theta(x)\alpha(x))$ 即为 Jacobian 因子。那么关系 (2.1.9) 式修改为

$$\partial_\mu \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \rangle = i\alpha(x) \quad (2.1.11)$$

它即为手征 $U(1)$ 等式。

为计算 (2.1.10) 式中的 Jacobian 因子, 我们作如下展开

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n a_n \varphi_n(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_n \bar{b}_n \varphi_n(x)^+ \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

其中 $\{\varphi_n(x)\}$ 是厄米算子 ϕ 的完备本征函数集合

$$\phi \varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x) \quad \langle \varphi_n(x) | \varphi_m(x) \rangle = \delta_{nm}, \quad (2.1.13)$$

为简单计, 我们假定所有本征值 λ_n 均是分立的。系数 a_n 和 $\bar{b}_n$ 是 Grassman 代数中的元素。变换 (2.1.12) 形式上是么正的。在展开式 (2.1.12) 下, 我们有

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_n d\bar{b}_n da_n \quad (2.1.14)$$

这里我们已选择了任意的归一化因子为 1。

同样, $\psi'(x)$ 和 $\bar{\psi}'(x)$ 也可以用 $\{\varphi_n(x)\}$ 来展开

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \sum_n a'_n \varphi_n(x) \\ \bar{\psi}'(x) &= \sum_n \bar{b}'_n \varphi_n(x)^+ \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

这样

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' &= \prod_{n,m} d\bar{b}_n' da_m' = J[A] \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \\
&= J[A] \prod_{n,m} d\bar{b}_n da_m \\
&= (\det C_{m,n})^{-2} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \quad (2.1.16)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\det C_{m,n} &= \det \langle \varphi_m(x) | e^{i\theta(x)\gamma_5} | \varphi_n(x) \rangle \\
&= \exp(\text{tr} \langle \varphi_m(x) | i\theta(x)\gamma_5 | \varphi_n(x) \rangle) \\
&= \exp\left(i \sum_n \langle \varphi_n(x) | \theta(x)\gamma_5 | \varphi_n(x) \rangle\right) \\
&= \exp\left(i \int d^4x \theta(x) \sum_n \varphi_n^+ \gamma_5 \varphi_n\right) \quad (2.1.17)
\end{aligned}$$

从而

$$J[A] = \exp\left(-2i \int d^4x \theta(x) \sum_n \varphi_n^+ \gamma_5 \varphi_n\right) \quad (2.1.18)$$

$$\alpha(x) = 2 \sum_n \varphi_n^+ \gamma_5 \varphi_n \quad (2.1.19)$$

(2.1.19) 式中的求和是无定义的和发散的。我们用算子 ϕ 来正规化它

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= 2 \sum_n \varphi_n^+ \gamma_5 \varphi_n = 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \varphi_n^+ \gamma_5 e^{-\phi^2/M^2} \varphi_n \\
&= 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} \text{tr} \gamma_5 e^{-\phi^2/M^2} \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n^+(y) \\
&= 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} \text{tr} \gamma_5 e^{-\phi^2/M^2} \delta^4(x-y) \\
&= 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} \text{tr} \gamma_5 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot y} e^{-\phi^2/M^2} e^{ik \cdot x} \\
&= 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \gamma_5 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} e^{-\phi^2/M^2} e^{ik \cdot x} \quad (2.1.20)
\end{aligned}$$

利用等式

$$\begin{aligned}
 \phi^2 &= \gamma^\mu D_\mu \gamma^\nu D_\nu = \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu \\
 &= g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] D_\mu D_\nu \\
 &= D^\mu D_\mu + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \\
 F_{\mu\nu} &= [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]
 \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

我们得

$$\begin{aligned}
 \alpha(x) &= 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_5 \exp \left(- \frac{(ik^\mu + D^\mu)(ik_\mu + D_\mu)}{M^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4M^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

求积符号理解为对内部对称指标和 Dirac 指标同时进行。对 (2.1.22) 式进行积分变数变换： $k \rightarrow Mk$ ，我们得

$$\begin{aligned}
 \alpha(x) &= 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \gamma_5 \exp \left(- \frac{1}{4M^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\
 &\quad M^4 \cdot \exp \left(k^\mu k_\mu - \frac{i}{M} k_\mu D^\mu - \frac{D^\mu D_\mu}{M^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

对上式中的指数按 $1/M$ 进行展开，在 tr 符号以及 $M \rightarrow \infty$ 的极限下，展开式中只有 $\frac{1}{M^4}$ 项有贡献，所以

$$\begin{aligned}
 \alpha(x) &= 2 \text{tr} \gamma_5 \frac{1}{2!} \left(- \frac{1}{4M^2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} \\
 &= - \frac{1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho}
 \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

这样

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' = \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left(\frac{i}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \int d^4x \partial(x) \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho}\right) \quad (2.1.25)$$

我们得反常的手征 $U(1)$ 等式

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) = \left\langle -\frac{i}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} \right\rangle \quad (2.1.26)$$

通过Wick转动转回到Minkowski时空，即去掉上式右边的因子 i ，我们得到Minkowski时空中的结果。

在 $D=2n$ 维中，上述计算可以类似地进行。我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha(x) &= \text{tr} \frac{1}{n!} \gamma_5 \left(-\frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \right)^n \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{-k^2} \\ &= \frac{i^n}{n! (4\pi)^n} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{2n}} \text{tr} F_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2n-1} \mu_{2n}} \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

2.2 非阿贝尔反常

在本节中，我们来讨论非阿贝尔反常，即在非阿贝尔手征规范变换下的反常。考虑已延拓到了Euclidean空间的费米部分拉氏量

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi \quad (2.2.1)$$

$$\not{\partial} = \gamma^\mu (\partial_\mu + V_\mu + A_\mu \gamma_5)$$

此处的 $V_\mu = -it^a V_\mu^a$ 为矢量规范场， $A_\mu = -it^a A_\mu^a$ 为轴矢规范场。在Euclidean空间中，算子 $\not{\partial}$ 并非厄米的

$$\not{\partial}^\dagger = \gamma^\mu (\partial_\mu + V_\mu - A_\mu \gamma_5) \neq \not{\partial} \quad (2.2.2)$$

为使 ϕ 厄米, 我们对 A_μ 作光滑的延拓: $A_\mu \rightarrow i A_\mu$ 。在完成了所有的计算后, 我们再把 A_μ 延拓回来。在做了上述延拓后, 算子

$$\phi = \gamma^\mu (\partial_\mu + V_\mu + i A_\mu \gamma_5) = \phi^\dagger \quad (2.2.3)$$

是厄米的了。

若我们应用完备基矢

$$\phi \varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x) \quad \langle \varphi_m(x) | \varphi_n(x) \rangle = \delta_{m,n} \quad (2.2.4)$$

和对应的正规子

$$e^{-\phi^2/M^2} \quad (2.2.5)$$

那么用与 2.1 节中相类似的办法, 我们可得非阿贝尔反常。例如, 对手征变换:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta^a(x) i^a \gamma_5} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\theta^a(x) i^a \gamma_5} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

我们得Jacobian因子

$$J[V, A] = \exp\left(-i \int d^4x \theta^a(x) \alpha^a(x)\right) \quad (2.2.7)$$

$$\alpha^a(x) = 2 \sum_n \varphi_n^\dagger i^a \gamma_5 \varphi_n \quad (2.2.8a)$$

$$\sum_n \varphi_n^\dagger i^a \gamma_5 \varphi_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} i^a \gamma_5 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} e^{-\phi^2/M^2} e^{ikx} \quad (2.2.8b)$$

利用等式

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \tilde{D}^\mu D_\mu + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tilde{D}_\mu D_\nu \\ \tilde{D}_\mu &= \partial_\mu + V_\mu - i A_\mu \gamma_5 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

我们得

$$e^{-ikx} e^{-\phi^2/M^2} e^{ikx} = \exp\left\{\frac{-1}{M^2} \left[(ik^\mu + \tilde{D}^\mu)(ik_\mu + D_\mu)\right]\right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (ik_\mu + \tilde{D}_\mu) (ik_\nu + D_\nu) \Big] \Big\} \\
= & \exp \left\{ \frac{1}{M^2} \left[k^\mu k_\mu - ik^\mu \left((\tilde{D}_\mu + D_\mu) \right. \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] (D^\nu - \tilde{D}^\nu) \Big) \\
& \left. \left. - \left(\tilde{D}^\mu D_\mu + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tilde{D}_\mu D_\nu \right) \right] \right\} \quad (2.2.10)
\end{aligned}$$

作积分变数变换: $k \rightarrow Mk$, 则 (2.2.8) 式化为

$$\begin{aligned}
\sum_s \varphi_s^\dagger \gamma_5 t^a \varphi_s &= \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr } t^a \gamma_5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp(k^\mu k_\mu) M^4 \\
& \cdot \exp \left\{ -i \frac{k^\mu}{M} \left[(\tilde{D}_\mu + D_\mu) + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (D_\nu - \tilde{D}_\nu) \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{M^2} \left(\tilde{D}^\mu D_\mu + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tilde{D}_\mu D_\nu \right) \right\} \quad (2.2.11)
\end{aligned}$$

把 (2.2.11) 式中的指数按 $\frac{1}{M}$ 的幂次展开。在 $M \rightarrow \infty$ 的极限下, 我们只需保留到 $\frac{1}{M^4}$ 项。由于求积符号和对称的反积分, 因此零阶项和 $\frac{1}{M}$ 的奇次幂项均为零。剩下的项正比于 M 的零次幂和二次幂。利用积分公式:

$$\begin{aligned}
\int d^4 k e^{-k^2} &= \pi^2 \\
\int d^4 k e^{-k^2} k_\mu k_\nu &= -\frac{\pi^2}{2} g_{\mu\nu} \\
\int d^4 k e^{-k^2} k_\mu k_\nu k_\sigma k_\rho &= \frac{\pi^2}{4} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma})
\end{aligned} \quad (2.2.12)$$

我们得

$$\begin{aligned} \sum_n \varphi_n^+ t^a \gamma_5 \varphi_n &= \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} t^a \gamma_5 \left(\frac{1}{(4\pi)^2} \left[-M^2 a_2 + \frac{1}{2!} (a_2)^2 \right. \right. \\ &\quad - \frac{1}{3!} 2^2 \frac{(-g^{\mu\nu})}{2} [(a_1)_\mu (a_1)_\nu a_2 + (a_1)_\mu a_2 (a_1)_\nu \\ &\quad + a_2 (a_1)_\mu (a_1)_\nu] + \frac{1}{4!} 2^4 \frac{g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}}{4} \\ &\quad \left. \left. \cdot (a_1)_\mu (a_1)_\nu (a_1)_\sigma (a_1)_\rho \right] \right) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

其中

$$\begin{aligned} (a_1)_\mu &= \partial_\mu + V_\mu + i \frac{1}{2} \gamma_5 [\gamma_\mu, \gamma^\nu] A_\nu \\ a_2 &= \tilde{D}_\mu D^\mu + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tilde{D}_\mu D_\nu \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

在经过冗长的但直接的运算后，我们有：

$$\begin{aligned} \sum_n \varphi_n^+ t^a \gamma_5 \varphi_n &= \frac{-1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} \left\{ t^a \left(V_{\mu\nu} V_{\sigma\rho} \right. \right. \\ &\quad - \frac{1}{3} A_{\mu\nu} A_{\sigma\rho} + \frac{2}{3} (A_\mu A_\nu V_{\sigma\rho} + A_\mu V_{\nu\sigma} A_\rho \\ &\quad \left. \left. + V_{\mu\nu} A_\sigma A_\rho) - \frac{4}{3} A_\mu A_\nu A_\sigma A_\rho \right) \right\} + (\text{正常宇称项}) \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

其中

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu} &= \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + [V_\mu, V_\nu] + [A_\mu, A_\nu] \\ A_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, V_\nu] + [V_\mu, A_\nu] \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

(2.2.15) 式中的正常宇称项

$$\begin{aligned} &\propto \lim_{M \rightarrow \infty} M^2 \gamma_5 F^{(A)} + \frac{1}{24\pi^2} \\ &\quad \cdot \text{tr} \{ t^a (\partial^2 F^{(A)} + [F^{(V)}, F^{(A)}] + [G_{\mu\nu}^{(V)}, F^{(A)\mu\nu}] \\ &\quad + 2[\partial^\mu G_{\mu\nu}^{(V)}, A^\nu] + 2[V_\mu, \partial^\mu F^{(A)}] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2([G_{\mu\nu}^{(v)}, V^\mu], A^\nu) + [V_\mu, [V^\mu, F^{(A)}]] \\
& - [A^\mu, [A_\mu, F^{(A)}]] + 2F_{\mu\nu}^{(A)}\{A^\mu, A^\nu\} \\
& + 2\{A^\mu, A^\nu\}F_{\mu\nu}^{(A)} + 4A_\mu F^{(A)}A^\mu \} \quad (2.2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-iF^{(A)} &= \partial^\mu A_\mu + [V^\mu, A_\mu] \\
-iF_{\mu\nu}^{(A)} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [V_\mu, A_\nu] \\
&- [V_\nu, A_\mu] \\
F^{(v)} &= \partial^\mu V_\mu \\
G_{\mu\nu}^{(v)} &= \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + \frac{1}{2}[V_\mu, V_\nu] - \frac{1}{2}[A_\mu, A_\nu] \quad (2.2.18)
\end{aligned}$$

显然, 在 $A \rightarrow -A$ 时正常宇称项反号。由于在 Euclidean 空间中, $\bar{\psi}$ 与 ψ 独立, 因此我们可用 $\tilde{\phi}$ 来正规化来自于 $\bar{\psi}$ 对费米子测度的贡献, 即

$$\begin{aligned}
\alpha^a(x) &= 2 \sum_s \varphi_s^\dagger t^a \gamma_5 \varphi_s = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} t^a \gamma_5 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\
&\cdot (e^{-ikx} e^{-\phi^2/M^2} e^{ikx} + e^{-ikx} e^{-\tilde{\phi}^2/M^2} e^{ikx}) \quad (2.2.19)
\end{aligned}$$

因算子 $\tilde{\phi}$ 相当于在算子 ϕ 中令 $A \rightarrow -A$, 故用它正规化所产生的正常宇称项部分与用 ϕ 正规化产生的正常宇称部分大小相等符号相反, 而反常宇称部分 (即正比于 $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ 的部分) 大小与符号均相同。从而正常宇称项部分互相抵消, 于是,

$$\begin{aligned}
\alpha^a(x) &= \frac{-1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} t^a \left(V_{\mu\nu} V_{\sigma\rho} - \frac{1}{3} A_{\mu\nu} A_{\sigma\rho} \right. \\
&+ \frac{2}{3} (A_\mu A_\nu V_{\sigma\rho} + A_\mu V_{\nu\sigma} A_\rho + V_{\mu\nu} A_\sigma A_\rho) \\
&\left. - \frac{4}{3} A_\mu A_\nu A_\sigma A_\rho \right) \quad (2.2.20)
\end{aligned}$$

把 A_μ 解析延拓回去, 即令 $A_\mu \rightarrow -iA_\mu$, 最后我们得:

$$\begin{aligned}
\alpha^a(x) &= \frac{-1}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} t^a \left(V_{\mu\nu} V_{\sigma\rho} + \frac{1}{3} A_{\mu\nu} A_{\sigma\rho} \right. \\
&\left. - \frac{8}{3} (A_\mu A_\nu V_{\sigma\rho} + A_\mu V_{\nu\sigma} A_\rho + V_{\mu\nu} A_\sigma A_\rho) \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{32}{3} A_\mu A_\nu A_\sigma A_\rho) \quad (2.2.21)$$

$$J[V, A] = \exp\left(-i \int d^4x \theta^a(x) a^a(x)\right) \quad (2.2.22)$$

我们可得 Euclidean 空间中 Ward 等式

$$\begin{aligned} D_\mu \langle \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi \rangle &= 0 \\ D_\mu \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 t^a \psi \rangle &= i a^a(x) \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

通过 Wick 转动转回到 Minkowski 时空中, 即去掉上式右边的 i 因子, 我们得熟悉的反常 Ward 等式。 $a^a(x)$ 即 Bardeen 反常。

注意到 (2.2.23) 式对应于路径积分

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp\left(\int d^4x \bar{\psi} i \not{D} \psi\right) \quad (2.2.24)$$

这里我们并没有明显写出 (2.2.24) 式中的局域抵消项。我们也可用左、右手场把拉氏量 (2.2.1) 写作为:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}_L i \not{D} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{D} \psi_R \quad (2.2.25)$$

$$\not{D}_L = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_{L\mu}) \quad \not{D}_R = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_{R\mu})$$

$$A_{L\mu} = A_\mu - A_\mu^5 \quad A_{R\mu} = V_\mu + A_\mu^5$$

与 (2.2.25) 式对应的路径积分为

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\bar{\psi}_L \mathcal{D}\psi_L \mathcal{D}\bar{\psi}_R \mathcal{D}\psi_R \exp\left[\int d^4x \left(\bar{\psi}_L i \not{D}_L \psi_L \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\psi}_R i \not{D}_R \psi_R \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

这样我们可以得到对应于上式的两个独立的等式

$$\begin{aligned} D^\mu J_{\mu}^{L^a} &= \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\mu \text{tr} t^a \left(A_{L\nu} \partial_\sigma A_{L\rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} A_{L\nu} A_{L\sigma} A_{L\rho} \right) \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

$$D^\mu J_{\mu}{}^{ab} = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\mu \text{tr} t^a \left(A_{R\nu} \partial_\sigma A_{R\rho} + \frac{1}{2} A_{R\nu} A_{R\sigma} A_{R\rho} \right) \quad (2.2.28)$$

$$J_{\mu}{}^{ab} = \bar{\psi}_L \gamma_\mu t^a \psi_L$$

$$J_{\mu}{}^{ab} = \bar{\psi}_R \gamma_\mu t^a \psi_R \quad (2.2.29)$$

这些方程结构上是相同的，故以后我们只写其中之一。的确，许多物理上有兴趣的理论只是由左手场构成的。这样我们常常只写出 (2.2.27) 式，且忽略指标 L ：

$$D^\mu J_{\mu}{}^a = \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\mu \text{tr} t^a \left(A_\nu \partial_\sigma A_\rho + \frac{1}{2} A_\nu A_\sigma A_\rho \right) \quad (2.2.30)$$

注意到 (2.1.24) 式的右边也是一个全散度，

$$\partial^\mu J_{\mu}{}^a = -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\mu \text{tr} \left(A_\nu \partial_\sigma A_\rho + \frac{2}{3} A_\nu A_\sigma A_\rho \right) \quad (2.2.31)$$

$$J_{\mu}{}^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi$$

(2.2.30) 式和 (2.2.31) 式右边的两个表达式非常相似，故不要把对应于两种不同反常的两个表达式相混。阿贝尔（或 $U_1(1)$ ）反常是规范不变的，非阿贝尔反常是规范协变的，它由非阿贝尔流的协变散度给出。然而在阿贝尔和非阿贝尔两种反常之间有本质的但相当不平庸的联系。

第 3 章

手征反常和它的微分几何构造

3.1 手征反常和自洽性条件

我们定义算子

$$X^a(x) = -\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} - \left(A_\mu \times \frac{\delta}{\delta A_\mu} \right)^a \quad (3.1.1)$$

$$\left(A_\mu \times \frac{\delta}{\delta A_\mu} \right)^a = if^{abc} A_\mu^b \frac{\delta}{\delta A_\mu^c}$$

$X^a(x)$ 生成手征规范变换, 它满足如下代数关系

$$[X^a(x), X^b(y)] = if^{abc} X^c(x) \delta(x-y) \quad (3.1.2)$$

$X^a(x)$ 作用在真空泛函 $W[A]$ 上定义了手征规范反常

$$X^a(x)W[A] = \alpha^a[A](x) \quad (3.1.3)$$

从(3.1.2)式, 我们得

$$X^a(x)\alpha^b(y) - X^b(y)\alpha^a(x) = if^{abc}\alpha^c(x)\delta(x-y) \quad (3.1.4)$$

(3.1.4) 式即称为 Wess-Zumino 自洽性条件。它的平庸解为

$$a^a(x) = X^a(x) \hat{a}[A] \quad \hat{a}[A] \neq 0 \quad (3.1.5)$$

很容易验证(3.1.5)式满足自洽性条件(3.1.4)式。(3.1.4) 式的非平庸解即定义为反常。

3.2 四维和高维阿贝尔反常的微分几何构造

我们将应用微分形式语言。矢量势1-形式

$$A = A_\mu dx^\mu \quad (3.2.1)$$

$A_\mu = -it^a A^a_\mu$, 所以 A 同时是矩阵和形式。规范场2-形式

$$F = dA + A^2 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.2.2)$$

$$F_{\mu\nu} = -it^a F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

我们容易证明Bianchi等式

$$DF = dF + [A, F] = 0 \quad (3.2.3)$$

规范变换 ζ 由下描述:

$$\begin{aligned} \zeta A &= -dv - [A, v] = -Dv \\ \zeta F &= -[F, v] \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

v 是无穷小的0-形式, 它在规范群的李代数中取值。

那么在 $D = 2n$ 维中, $U_A(1)$ 反常由 $2n$ -形式给出

$$\Omega_{2n}^{-1}(F) = \text{tr} F^n = \text{Str} F^n \quad (3.2.5)$$

它是由不变性的考虑得出的: 散度 $\partial^\mu J_\mu^A$ 是规范不变的, 它有量纲 $2n$, 且在宇称和时间反演下是奇的。Str 表 k 个矩阵乘积的对称化迹:

$$\text{Str}(B_1, \dots, B_k) = \frac{1}{k!} \sum_{(p_1, \dots, p_k)} \text{tr}(B_{p_1} B_{p_2} \dots B_{p_k}) \quad (3.2.6)$$

求和是对 $(1, \dots, k)$ 的所有置换 $(p_1, \dots, p_k)$ 进行的。在 (3.2.5) 式中, Str 可由通常的迹 tr 代替, 但是在此式中引入 Str 可使下面的处理特别简化。

数学上, $\Omega_{2n}^{-1}(F)$ 称为 n 阶 Chern-示性, 它是规范不变的

$$\xi \Omega_{2n}^{-1}(F) = n \text{Str}([\nu, F], F^{*-1}) = 0 \quad (3.2.7)$$

由于 Bianchi 等式, Chern-示性也是闭的:

$$\begin{aligned} d\Omega_{2n}^{-1}(F) &= n \text{Str}(dF, F^{*-1}) = n \text{Str}(DF, F^{*-1}) \\ &\quad - n \text{Str}([A, F], F^{*-1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

根据 Poincaré 引理, Chern-示性局域上可写作某 $(2n-1)$ 形式的外微分

$$\Omega_{2n}^{-1}(F) = d\omega_{2n-1}^0(A) \quad (3.2.9)$$

为求出 $\omega_{2n-1}^0(A)$, 我们对 A 作变更: $A \rightarrow A + \delta A$ 。这里的 δ 是任意的变更, 并非一定是规范变更。那么 $\delta F = \delta(dA + A^2) = D(\delta A)$ 。现在我们计算

$$\begin{aligned} \delta \Omega_{2n}^{-1}(F) &= n \text{Str}(D(\delta A), F^{*-1}) \\ &= n d \text{Str}(\delta A, F^{*-1}) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

引入实参数 t , 定义

$$\begin{aligned} A_t &= tA \\ F_t &= dA_t + A_t^2 = tF + (t^2 - t)A \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

方程 (2.2.10) 可写作为

$$\delta \Omega_{2n}^{-1}(F_t) = n d \text{Str}(\delta A_t, F_t^{*-1}) \quad (3.2.12)$$

$$\delta = dt \frac{\partial}{\partial t}$$

把 (3.2.12) 式从 0 到 1 对 t 进行积分得

$$\Omega_{2n-1}^{-1}(F) = nd \int_0^1 dt \text{Str}[A, (tdA + t^2 A^2)^{*-1}] \quad (3.2.13)$$

从而我们有

$$\omega_{2n-1}^0(A) = n \int_0^1 dt t^{*-1} \text{Str}[A, (dA + tA^2)^{*-1}] \quad (3.2.14)$$

例如, 对四维的情况, $D = 2n = 4$,

$$\begin{aligned} \omega_4^0(A) &= \text{Str}(A, dA) + \frac{2}{3} \text{Str}(A, A^2) \\ &= \text{tr}\left(A dA + \frac{2}{3} A^3\right) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

对 $D = 2n = 6$,

$$\begin{aligned} \omega_6^0(A) &= \text{Str}(A, (dA)^2) + \frac{3}{2} \text{Str}(A, A^2, dA) \\ &\quad + \frac{3}{5} \text{Str}(A, A^2, A^2) \\ &= \text{tr}\left(A(dA)^2 + \frac{3}{2} A^3 dA + \frac{3}{5} A^5\right) \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

3.3 非阿贝尔手征反常的微分几何构造

为了求出在 $D = 2n$ 维中的非阿贝尔手征反常, 我们来寻找满足 Wess-Zumino 自洽性条件的量 $\alpha^*[A](x)$ 。为此我们先引入符号

$$\begin{aligned} u \cdot &= \int d^D x u^a(x) X^a(x) \quad (u = t^a u^a) \\ u \cdot \alpha[A] &= \int_{S^D} u^a(x) \alpha^*[A](x) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

上两式中的积分是对 D -维平坦空间进行的, 它可以看作为 D -维球 S^D (我们假定场强在无穷远处足够快地趋于零)。利用

(3.3.1) 式, Wess-Zumino自洽性条件可写作为

$$u \cdot X v \cdot \alpha[A] - v \cdot X u \cdot \alpha[A] = [u, v] \cdot \alpha[A] \quad (3.3.2)$$

现在我们来求满足上式的 $\alpha[A]$ 。为此我们到比原来的 D -维空间高一维的 $(D+1)$ -维空间去讨论问题。考虑此空间中的 $(D+1)$ -形式 $\omega^0_{2n+1}(A)$ 。形式上 $\omega^0_{2n+1}(A)$ 可以 $(D+2)$ 阶 Chern-示性 $\Omega^{-1}_{2n+2}(F)$ 得到,

$$\Omega^{-1}_{2n+2}(F) = d\omega^0_{2n+1}(A) \quad (3.3.3a)$$

$$\omega^0_{2n+1}(A) = (n+1) \int_0^1 dt \, t^* \text{Str}(A, (dA + tA^2)^*) \quad (3.3.3b)$$

因 $\Omega^{-1}_{2n+2}(F)$ 是 $(D+2)$ -形式, 故它在 $(D+1)$ -维空间中实际上为零。从而 (3.3.3a) 式只是形式上的。 $\omega^0_{2n+1}(A)$ 称为 Chern-Simons 第二类拓扑不变量。

从 Ω^{-1}_{2n+2} 的规范不变性, 我们知 (假定规范变换 $u \cdot X$ 与 d 反对易),

$$u \cdot X d\omega^0_{2n+1} = -d(u \cdot X \omega^0_{2n+1}) = 0 \quad (3.3.4)$$

局域上 $u \cdot X \omega^0_{2n+1}$ 可写作某个 $2n$ -形式 $\omega^1_{2n}(u, A)$ 的外微分,

$$u \cdot X \omega^0_{2n+1} = -d\omega^1_{2n}(u, A) \quad (3.3.5)$$

ω^1_{2n} 的上指标表 u 的阶数, 下指标表形式的次数。我们定义

$$u \cdot \alpha[A] = \int_{S^D} \omega^1_{2n}(u, A) \quad (3.3.6)$$

为了证明这样构造的 $\alpha[A]$ 自动满足自洽性条件 (3.3.2) 式, 我们假定当我们把规范场从 D -维球 S^D 光滑地延拓到边界为 S^D 的 $(D+1)$ -维盘 D^{D+1} 时, 没有拓扑障碍。这样下面的纯数学意义下的泛函是有意义的

$$\Omega[A] = \int_{D^{D+1}} \omega^0_{2n+1}(A) \quad (3.3.7)$$

从 (3.3.5) 式我们有

$$\begin{aligned}
u \cdot X \Omega[A] &= \int_{\partial D} u \cdot X \omega^0_{2n+1}(A) \\
&= - \int_{\partial D} \omega^1_{2n}(u, A)
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

我们已用了Stokes定理。从而

$$u \cdot X \int_{\partial D} \omega^1_{2n}(v, A) = -u \cdot X v \cdot X \Omega[A] \tag{3.3.9}$$

因 $[u \cdot X, v \cdot X] = [u, v] \cdot X$, 故我们看到由 (3.3.6) 式定义的 $u \cdot a[A]$ 满足自洽性条件 (3.3.2)。

为物理上应用方便, 我们需要知道 $\omega^1_{2n}(v, A)$ 的明显表达式。在下一章中, 我们将得到计算 ω^1_{2n} 的一个一般的表达式。这里我们先把它写出来:

$$\omega^1_{2n}(v, A) = n(n+1) \int_0^1 dt (1-t) \text{Str}(v d(AF_t)^{n-1}) \tag{3.3.10}$$

其中 $F_t = t dA + t^2 A^2$ 。

例如对 $D = 2n = 4$, 我们求得

$$\omega^1_4(v, A) = \text{tr} v d \left(A dA + \frac{1}{2} A^3 \right) \tag{3.3.11}$$

它即为手征 $SU(n)$ 规范理论中对应 (2.2.30) 式的反常。

对 $D = 2n = 6$, 我们有

$$\begin{aligned}
\omega^1_6(v, A) &= \text{tr} v d \left[A(dA)^2 + \frac{2}{5} (A^3 dA + dA A^3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{5} (A^2 dA A + A dA A^2) + \frac{2}{5} A^5 \right]
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

3.4 反常的变换性质

我们现在来考查反常在规范变换下如何变换。从 3.3 节知

$$\text{tr} F^* = d\omega_{2n-1}^0(A, F) \quad (3.4.1a)$$

$$\omega_{2n-1}^0(A, F) = n \int_0^1 dt \text{tr}(AF_t^{*-1}) \quad (3.4.1b)$$

$$F_t = dA_t + A_t^2, \quad A_t = tA$$

若我们取 A_t 为两个场 A_1 和 A_2 的内插场: $\hat{A}_t = tA_1 + (1-t)A_2$,

那么 $\hat{F}_t = d\hat{A}_t + \hat{A}_t^2 = tF_1 + (1-t)F_2 + (t^2 - t)(A_1 - A_2)^2$ 。

与 (3.4.1) 式相应我们可得

$$\text{tr} F_1^* - \text{tr} F_2^* = d\omega_{2n-1}^0(A_1, F_1 | A_2, F_2) \quad (3.4.2a)$$

$$\omega_{2n-1}^0(A_1, F_1 | A_2, F_2) = n \int_0^1 dt \text{tr}[(A_1 - A_2)\hat{F}_t^{*-1}] \quad (3.4.2b)$$

(3.4.2) 式是从 Chern-Weil 同态公式得来的比 (3.4.1) 式更一般的公式。为证明 (3.4.2) 式, 我们引入奇算子 l_t , 它有下面的定义

$$l_t A_t = 0 \quad l_t F_t = \delta A_t \quad (3.4.3)$$

其中: $\delta = dt \frac{d}{dt}$ 。容易证明:

$$l_t d + dl_t = \delta \quad (3.4.4)$$

把 (3.4.4) 式作用在 $\text{tr} \hat{F}_t^*$ 上, 并对 t 从 0 到 1 进行积分我们得到:

$$\begin{aligned} \text{tr} F_1^* - \text{tr} F_2^* &= (dK + Kd) \text{tr} \hat{F}_t^* \\ &= d(K \text{tr} \hat{F}_t^*) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

这里

$$K = \int_0^1 I_1 \quad (3.4.6)$$

为Cartan同伦算子。因此

$$\begin{aligned} \omega_{2n-1}^0(A_1, F_1 | A_2, F_2) &= K \operatorname{tr} \hat{F}_1^* \\ &= n \int_0^1 dt \operatorname{tr} ((A_1 - A_2) \hat{F}_1^{*-1}) \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

现在我们来考查 $\omega_{2n-1}^0(A_1, F_1 | A_2, F_2)$ 的性质。从 (3.4.2c) 式和 (3.4.1c) 式我们看到

$$\begin{aligned} \omega_{2n-1}^0(A_1, F_1 | A_2, F_2) - \omega_{2n-1}^0(A_1, F_1) \\ + \omega_{2n-1}^0(A_2, F_2) = (\text{闭形式}) \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

因此局域上它可写作某个 $(2n-2)$ -形式 $\alpha_{2n-2}(A_1, F_1 | A_2, F_2)$ 的外微分, 即:

$$\begin{aligned} \omega_{2n-1}^0(A_1, F_1 | A_2, F_2) - \omega_{2n-1}^0(A_1, F_1) \\ + \omega_{2n-1}^0(A_2, F_2) \\ = d\alpha_{2n-2}(A_1, F_1 | A_2, F_2) \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

我们来求 (3.4.9) 式中的 α_{2n-2} 。为此考虑内捩场 $A_{t,\tau} = tA_1 + \tau A_2, F_{t,\tau} = dA_{t,\tau} + A_{t,\tau}^2$ 。定义2-维算子 $l_{t,\tau}$:

$$l_{t,\tau} A_{t,\tau} = 0 \quad l_{t,\tau} F_{t,\tau} = \delta A_{t,\tau} \quad (3.4.10)$$

其中: $\delta = dt \frac{\partial}{\partial t} + d\tau \frac{\partial}{\partial \tau}$, 容易证明

$$l_{t,\tau} d + dl_{t,\tau} = \delta \quad (3.4.11)$$

设 $l_{t,\tau}$ 的 (t, τ) 分量分别为 k_t 和 k_τ , 即

$$l_{t,\tau} = d_t k_t + d_\tau k_\tau \quad (3.4.12)$$

那么 (3.4.11) 式可写作为

$$\begin{aligned} dk_t + k_t d &= \frac{\partial}{\partial t} \\ dk_\tau + k_\tau d &= \frac{\partial}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

从而

$$\begin{aligned} dk_i k_\tau - k_i k_\tau d &= (dk_i + k_i d) k_\tau - k_i (k_\tau d + dk_\tau) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} k_\tau - \frac{\partial}{\partial \tau} k_i \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

把(3.4.14)式作用到 $\text{tr} F^*_{i,\tau}$ 上, 并对 $t-\tau$ 平面上由 $t=0$, $u=0$ 和 $t+\tau=1$ 所包围的三角形作积分, 我们得:

$$\text{左边} = d \int_0^1 dt \int_0^{1-t} d\tau k_i k_\tau \text{tr} F^*_{i,\tau} \quad (3.4.15)$$

$$\text{右边} = \iint dt d\tau \left(\frac{\partial}{\partial t} k_\tau - \frac{\partial}{\partial \tau} k_i \right) \text{tr} F^*_{i,\tau} \quad (3.4.16)$$

利用Stokes定理, 我们可把(3.4.16)式化为沿三角形边界的路线积分:

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \oint (dt k_i + d\tau k_\tau) \text{tr} F^*_{i,\tau} \\ &= \omega^0_{2n-1}(A_1, F_1) - \omega^0_{2n-1}(A_1, F_1 | A_2, F_2) \\ &\quad - \omega^0_{2n-1}(A_2, F_2) \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

和(3.4.9)式比较我们得

$$\begin{aligned} \alpha_{2n-2}(A_1, F_1 | A_2, F_2) &= - \int_0^1 dt \int_0^{1-t} d\tau k_i k_\tau \text{tr} F^*_{i,\tau} \\ &= -n(n-1) \int_0^1 dt \int_0^{1-t} d\tau \text{Str}(A_1, A_2, F^*_{i,\tau}) \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

若我们令 $A_1 = A$, $A_2 = g d g^{-1}$, 那么 $\hat{A}_t = tA + (1-t)gdg^{-1}$,

$\hat{F}_t = tF + (t^2 - t)(A - gdg^{-1})^2$, 直接计算

$$\begin{aligned} \omega^0_{2n-1}(\hat{A}, \hat{F} | gdg^{-1}, 0) &= n \int_0^1 dt \text{tr} \{ (A - gdg^{-1}) \\ &\quad \cdot (tF + (t^2 - t)(A - gdg^{-1})^2)^{n-1} \} \\ &= \omega^0_{2n-1}(A - gdg^{-1}, F) \\ &= \omega^0_{2n-1}(A', F') \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

另外,

$$\omega^0_{2n-1}(A_1, F_1) = \omega^0_{2n-1}(A, F) \quad (3.4.20)$$

$$\begin{aligned} \omega^0_{2n-1}(A_2, F_2) &= \omega^0_{2n-1}(g d g^{-1}, 0) \\ &= -\omega^0_{2n-1}(g^{-1} d g, 0) \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2n-2}(A, F | g d g^{-1}, 0) \\ = -n(n-1) \int_0^1 dt \int_0^{1-t} d\tau \text{Str}(g d g^{-1} A t^{n-2} \tau^{n-2}) \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

因此从 (3.4.9) 式我们得:

$$\begin{aligned} \omega^0_{2n-1}(A', F') &= \omega^0_{2n-1}(A, F) + d\alpha_{2n-2} \\ &\quad + \omega^0_{2n-1}(g^{-1} d g, 0) \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

例如:

$$n=2, \quad \alpha_2 = -\text{tr}(g d g^{-1} A)$$

$$\begin{aligned} n=3, \quad \alpha_4 = \text{tr} \left\{ -\frac{1}{2} g d g^{-1} (F A + A F) + \frac{1}{2} g d g^{-1} A^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} g d g^{-1} A g d g^{-1} A + \frac{1}{2} (g d g^{-1})^3 A \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^0_3(A', F') &= \omega^0_3(A, F) + d\alpha_2 - \frac{1}{3} \text{tr}(g^{-1} d g)^3 \\ &\quad (3.4.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^0_5(A', F') &= \omega^0_5(A, F) + d\alpha_4 + \frac{1}{10} \text{tr}(g^{-1} d g)^5 \\ &\quad (3.4.25) \end{aligned}$$

(3.4.23) 式反映了 $\omega^0_{2n-1}(A, F)$ 在规范变换下的变换性质。

3.5 对称和非对称手征反常和 Wess-Zumino-Witten作用量

在3.4节中, 我们得到一个非常有用的公式

$$\begin{aligned} \omega_{2n-1}^0(A_1, F_1 | A_2, F_2) &= \omega_{2n-1}^0(A_1, F_1) \\ &\quad + \omega_{2n-1}^0(A_2, F_2) \\ &= d\alpha_{2n-2}(A_1, F_1 | A_2, F_2) \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2n-2}(A_1, F_1 | A_2, F_2) \\ = -n(n-1) \int_0^1 dt \int_0^{1-t} d\tau \text{Str}(A_1, A_2, F_1, F_2) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

本节中我们来考查 (3.5.1) 式及拓扑不变量 ω_{2n-1}^0 的一些重要的应用。我们首先考虑只有左手场 A_L 的情况。象第2章中所提到的, 我们忽略指标 L 。令 (3.5.1) 式中的 $A_1 = A$, $A_2 = h d h^{-1}$, h 为手征场或称 Goldstone 玻色场。则从 (3.4.23) 式我们有

$$\omega_{2n-1}^0(A^h) = \omega_{2n-1}^0(A) + d\alpha_{2n-2} + \omega_{2n-1}^0(h^{-1} d h) \quad (3.5.3)$$

这里我们已把 $\omega_{2n-1}^0(A, F)$ 简记作了 $\omega_{2n-1}^0(A)$;

$$A^h = h^{-1}(A + d)h \quad (3.5.4)$$

在规范变换 g 下, A 和 h 按如下方式变换:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow g^{-1}(A + d)g \quad (g = e^\theta) \\ h &\rightarrow g^{-1}h \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

我们容易看到在 (3.5.5) 下, $A^h \rightarrow A^h$, 故 $\omega_{2n-1}^0(A^h)$ 是规范不变的。定义 $(2n-2)$ -维空间 S^{2n-2} 上的 Wess-Zumino-Witten 有效作用量泛函:

$$\Gamma_{WZW}[A, h] = \int_{D^{2n-1}} (\omega^0_{2n-1}(A^h) - \omega^0_{2n-1}(A)) \quad (3.5.6)$$

其中 D^{2n-1} 为 $(2n-1)$ -维盘, 它的边 ∂D^{2n-1} 为 $(2n-2)$ -维紧化时空 S^{2n-2} 。由于 $\omega^0_{2n-1}(A^h)$ 规范不变, 故在无穷小规范变换 δ_θ 下,

(3.5.6) 式给出 $(2n-2)$ -维空间中的正确的自洽反常:

$$\begin{aligned} \delta_\theta \Gamma_{WZW}[A, h] &= \int_{D^{2n-1}} \delta_\theta (\omega^0_{2n-1}(A^h) - \omega^0_{2n-1}(A)) \\ &= - \int_{D^{2n-1}} \delta_\theta \omega^0_{2n-1}(A) \\ &= \int_{D^{2n-1}} d\omega^1_{2n-2}(\theta, A) \\ &= \int_{S^{2n-2}} \omega^1_{2n-2}(A, \theta) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

从而表示 $\Gamma_{WZW}[A, h]$ 满足反常的 Ward 等式。注意到 Γ_{WZW} 与 3.2 节中定义的 $\Omega[A]$ 很相类似。

对 $n=3$, 我们有

$$\delta_\theta \omega^0_5(A) = -d\text{tr}\theta d\left(AdA + \frac{1}{2}A^3\right) \quad (3.5.8)$$

$$\begin{aligned} \delta_\theta \int_{D^5} (\omega^0_5(A^h) - \omega^0_5(A)) &= - \int_{D^5} \delta_\theta \omega^0_5(A) \\ &= \int_{S^4} \text{tr}\theta d\left(AdA + \frac{1}{2}A^3\right) \\ &= \int_{S^4} \theta \cdot \alpha[A] \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

另一方面, 从 (3.5.3) 式我们得

$$\Gamma_{WZW}[A, h] = \int_{S^{2n-2}} \alpha_{2n-2} + \int_{D^{2n-1}} \omega^0_{2n-1}(h^{-1}dh) \quad (3.5.10)$$

$$\alpha_{2n-2} = -n(n-1) \int_0^1 dt \int_0^{1-t} d\tau \text{Str}(h d h^{-1} A F_{\tau, \tau}^{(n-2)}) \quad (3.5.11)$$

因 $d(\omega_{2n-1}^0(A^1) - \omega_{2n-1}^0(A)) = \text{tr}((F^1)^n) - \text{tr} F^n = 0$, 故局域上(3.5.10)式可以写作对 $S^{2n-2} = \partial D^{2n-1}$ 的积分。从而(3.5.10)式中的积分在 $(2n-1)$ -维流形 D^{2n-1} 的形变下是不变的。

(3.5.10) 式的最后一项是在群空间中的积分。对于第 $(2n-1)$ -阶同伦群 Π_{2n-1} 不为零的群, 存在有群流形中的 $(2n-1)$ -链 C_{2n-1} 使得

$$\int_{C_{2n-1}} \omega_{2n-1}^0(h^{-1}dh) \propto \int_{C_{2n-1}} \text{tr}(h^{-1}dh)^{2n-1} \neq 0 \quad (3.5.12)$$

在适当地归一化后, (3.5.12) 式中的积分应等于一个整数。这意味着尽管 (3.5.10) 式中的积分在我们对 $(2n-1)$ -流形 D^{2n-1} 进行小的形变时是不变的, 但对于大的形变, 积分是不确定的。即不同的 D^{2n-1} 对应于不同的积分值。这个事实导致了 Wess-Zumino-Witten 有效作用量的量子化。在下一节中, 我们将把反常的归一化常数选作为 $2\pi N$, 其中 N 使得积分

$$N \cdot \int_{C_{2n-1}} \text{tr}(h^{-1}dh)^{2n-1} = \text{整数} \quad (3.5.13)$$

然后我们考虑左-右规范场的情况。对左-右规范场 A_L 和 A_R , 我们有如下规范变换:

$$\begin{aligned} A_L &\rightarrow A_L^g = g_L^{-1}(A_L + d)g_L \quad g_L = e^{i\theta_L} \\ A_R &\rightarrow A_R^g = g_R^{-1}(A_R + d)g_R \quad g_R = e^{i\theta_R} \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

(g_L, g_R) 表手征规范群 $SU(n)_L \times SU(n)_R$ 的元素。除了左-右场 A_L 和 A_R 外, 我们也有矢量场 V 和轴矢场 A , 它们与 A_L 和 A_R 的关系为:

$$A_L = V - A \quad A_R = V + A \quad (3.5.15)$$

对应于 V 和 A 的规范变换为 g_V 和 g_A :

$$g_V = e^{i\theta_V} \quad g_A = e^{i\theta_A} \quad (3.5.16)$$

(θ_V, θ_A) 与 (θ_L, θ_R) 的关系为

$$\theta_L = \theta_V - \theta_A \quad \theta_R = \theta_V + \theta_A \quad (3.5.17)$$

在矢量规范变换下, 即 $g_L = g_R$, A_L 和 A_R 以同样的方式变换。因此 $\omega_{2n-1}^0(A_L | A_R)$ 是不变的, 即: $\delta_{\theta_V} \omega_{2n-1}^0(A_L | A_R) = 0$ 。反常只存在于轴矢规范变换的情况:

$$\begin{aligned} \delta_{\theta_A} \omega_{2n-1}^0(A_L | A_R) &= -d\omega_{2n-2}^1(\theta_A, V, A) \\ &\equiv -d\text{tr}(\theta_A \alpha_A) \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

例如对 $n=3$, 我们有

$$\begin{aligned} \delta_{\theta_V} \omega_5^0(A_L | A_R) &= 0 \\ \delta_{\theta_A} \omega_5^0(A_L | A_R) &= -\frac{1}{3} d\text{tr} \theta_A \left(F_V^2 + \frac{1}{3} F_A^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{3} (A^2 F_V + A F_V A + F_V A^2) + \frac{32}{3} A^4 \right) \end{aligned} \quad (3.5.19a)$$

$$\begin{aligned} F_V &= dV + V^2 + A^2 \\ F_A &= dA + VA + AV \end{aligned} \quad (3.5.19b)$$

(3.5.19) 式即为四维空间中 Bardeen 的手征反常的形式 (见 2.2 节)。我们把 $\text{tr} \theta_A \alpha_A$ 称为非对称手征反常。

同样在无穷小左-右规范变换下, 我们有

$$(\delta_{\theta_L} + \delta_{\theta_R}) \omega_{2n-1}^0(A_L | A_R) = -d\{\text{tr}(\theta_L \alpha_L - \theta_R \alpha_R)\} \quad (3.5.20)$$

反常 $\text{tr}(\theta_L \alpha_L - \theta_R \alpha_R)$ 称为对称手征反常。对 $n=3$,

$$\begin{aligned} &(\delta_{\theta_L} + \delta_{\theta_R}) \omega_5^0(A_L | A_R) \\ &= -d\text{tr} \left\{ \theta_L d \left(A_L d A_L + \frac{1}{2} A_L^3 \right) \right\} \\ &\quad + d\text{tr} \left\{ \theta_R d \left(A_R d A_R + \frac{1}{2} A_R^3 \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

它与 (2.2.27) 和 (2.2.28) 式相符。

现在我们令 (3.5.1) 式中的 $A_1 = A_L$, $A_2 = A_R$, 那么

$$\begin{aligned}\omega_{2n-1}^0(A_L|A_R) &= \omega_{2n-1}^0(A_L) - \omega_{2n-1}^0(A_R) \\ &\quad + d\alpha_{2n-2}(A_L|A_R)\end{aligned}\quad (3.5.22)$$

我们能容易地看到上式中的 $\alpha_{2n-2}(A_L|A_R)$ 正是 Bardeen 的局域抵消项, 它把形式为 $\text{tr}(\theta_L a_L - \theta_R a_R)$ 的左-右对称反常变为形式为 $\text{tr}\theta_L a_L$ 的非对称反常。

定义左-右规范场的在 $(2n-2)$ -维空间中的 Wess-Zumino-Witten 有效作用量:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{WZW}}[A_L, A_R, h] &= \int_{D^{2n-1}} (\omega_{2n-1}^0(A_L^h|A_R) \\ &\quad - \omega_{2n-1}^0(A_L|A_R))\end{aligned}\quad (3.5.23)$$

与上相同, h 为手征场或称 Goldstone 玻色场, 它现在是手征规范群 $SU(n)_L \times SU(n)_R$ 的非线性实现, $A_L^h = h^{-1}(A_L + d)h$, h 在手征规范群下的变换性质为:

$$h \rightarrow g_L^{-1} h g_R \quad (3.5.24)$$

从 (3.5.14) 式和 (3.5.24) 式知, A_L^h 的变换性质与 A_R 的变换性质相同, 所以 $\omega_{2n-1}^0(A_L^h|A_R)$ 是规范不变的。容易验证作用量 (3.5.23) 给出正确的对称和非对称手征反常的形式。

利用 (3.5.1) 和 (3.5.3) 式, 我们可得

$$\begin{aligned}\omega_{2n-1}^0(A_L^h|A_R) &- \omega_{2n-1}^0(A_L|A_R) \\ &= \omega_{2n-1}^0(h^{-1}dh) + d\alpha_{2n-2}(A_L^h|A_R) \\ &\quad + d\alpha_{2n-2}(A_L|hdh^{-1}) + d\alpha_{2n-2}(A_L|A_R)\end{aligned}\quad (3.5.25)$$

故 (3.5.23) 式化为:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{WZW}}[A_L, A_R, h] &= \int_{D^{2n-1}} \{ \alpha_{2n-2}(A_L^h|A_R) \\ &\quad + \alpha_{2n-2}(A_L|hdh^{-1}) + \alpha_{2n-2}(A_L|A_R) \} \\ &\quad + \int_{D^{2n-1}} \omega_{2n-1}^0(h^{-1}dh)\end{aligned}\quad (3.5.26)$$

(3.5.26) 式即为 $(2n-2)$ -维中标准的对左-右场的 Wess-

Zumino-Witten有效作用量。由于

$$\begin{aligned} d(\omega_{2n-1}^0(A_L \mid A_R) - \omega_{2n-1}^0(A_L \mid A_R)) \\ = \text{tr}(F^{\wedge}_L)^n - \text{tr}F^{\wedge}_R - \text{tr}F^{\wedge}_L + \text{tr}F^{\wedge}_R = 0 \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

故与本节中 (3.5.11) 式以下的讨论相同, 在 $(2n-1)$ -流形 D^{2n-1} 的小的形变下, (3.5.26) 式中的积分不变; 而在大的形变下, 积分不确定。从而导致 (3.5.26) 式的量子化。

3.6 反常的归一化常数

阿贝尔反常的归一化常数可联系到Dirac算子的指数公式。这给出正确地归一化的阿贝尔或 $U_A(1)$ 反常。利用 $2n$ -维中阿贝尔反常和 $(2n-2)$ -维中非阿贝尔反常之间的关系, 我们也可以求出非阿贝尔反常的归一化常数。所以, 两种归一化常数均可从纯粹的几何考虑来加以确定。

假定第2章中手征转动角 $\theta(x)$ 变成与 x 无关, 那么从 (2.1.18) 式和 (2.1.19) 式我们有:

$$\int a(x) dx = 2 \int dx \sum_n \varphi_n^+ \gamma_5 \varphi_n \quad (3.6.1)$$

因 $\gamma_5 \varphi_n$ 有本征值 $-\lambda_n$, 故对本征值 $\lambda_n \neq 0$ 的本征函数 φ_n , (3.6.1) 式的右边为零; 只有 $\lambda_n = 0$ 的本征函数对求和有贡献:

$$\begin{aligned} \int dx \sum_{\text{零模}} \varphi_n^+ \gamma_5 \varphi_n &= \int dx \left(\sum_{n=1}^{n_+} \varphi_{n+}^+ \varphi_{n+} - \sum_{n=1}^{n_-} \varphi_{n-}^+ \varphi_{n-} \right) \\ &= n_+ - n_- \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

n_+ 和 n_- 分别为正负手征性零模 $(\varphi_{n+}, \varphi_{n-})$ 的个数, 两者之差 $(n_+ - n_-)$ 正好是 Dirac 算子的指数。因此我们证明了轴反常 (阿贝尔的) 和指数定理的直接的联系。

我们知道指数由Chern-示性

$$Ch = \text{tr} e^{\frac{i}{2\pi} F} \quad (3.6.3)$$

的积分给出。展开上式右端，则在 $2n$ -维中，

$$n_+ - n_- = \int \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{2\pi} \right)^n \text{tr} F^n \quad (3.6.4)$$

这样，

$$a(x) = \frac{2}{n!} \cdot \frac{i^n}{(2\pi)^n 2^n} e^{i\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \text{tr} F_{\mu_1\mu_2} F_{\mu_3\mu_4} \cdots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}} \quad (3.6.5)$$

因 $F_{\mu\nu} = -iF^{\sigma\mu}F_{\sigma\nu}$ ，故(3.6.5)式是实的。

非阿贝尔反常与指数定理的关系并不太明显。从本章3.3节的计算知， $(2n-2)$ -维中的非阿贝尔反常与 $2n$ -维中的阿贝尔反常有密切的关系。因此可以断言 $(2n-2)$ -维中的非阿贝尔反常与 $2n$ -维中的指数定理相联系，即与族指数定理相联系。从而非阿贝尔反常的归一化常数也可以相应地得到。可以证明非阿贝尔反常的归一化常数直接联系到指数公式的归一化常数，而不会出现象在阿贝尔反常的归一化中所必要的附加的因子2。但是由于非阿贝尔反常决定了唯象的Wess-Zumino-Witten有效作用量，而Wess-Zumino-Witten有效作用量必须满足量子化条件，故有效作用量的正确的归一化常数应是原来的归一化常数的 2π 倍。这意味着 $(2n-2)$ -维中反常的归一化常数应为：

$$2\pi \cdot \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{2\pi} \right)^n \quad (3.6.6)$$

$\frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{2\pi} \right)^n$ 即为 $2n$ -维中指数公式的归一化常数。

第 4 章

反常和李代数上同调系列

4.1 反常的递降方程

在本节中，我们来推导反常的递降方程（或称 Zig-Zag 方程）。我们用 d 表时空流形上的微分， $d = dx^a \partial / \partial x^a$ ；用 ξ 表规范变换。我们将把 ξ 解释作为规范群流形上的反导数，即 $\xi = dt' \partial / \partial t'$ ； t' 是群元素 g 可以依赖的参数， $g = g(x, t)$ 。用规范变换 ξ 变出来的规范势相互规范等价。我们首先讨论平庸的纤维丛的情况，即矢量势的拓扑数为零的情况。定义规范变换

$$A(x) \rightarrow g^{-1}(x, t) (A(x) + d + \xi) g(x, t) \quad (4.1.1)$$

很清楚 $d^2 = \xi^2 = d\xi + \xi d = 0$ (4.1.2)

对 $A(x, t) = g^{-1}(x, t) (A(x) + d) g(x, t) v = g^{-1} \xi g$ (4.1.3)

我们能证明

$$\xi A = -dv - vA - Av = -Dv$$

$$\xi v = -v^2$$

$$\xi F = Fv - vF \quad (4.1.4)$$

设 $P(F_1, \dots, F_n)$ 是李代数值的变量 $F_1, \dots, F_n$ 的 n 秩对称不变多项式, 若有一些 F_i 相等, 比如说 $F_3 = F_4 = \dots = F_n = F$, 则我们将把 $P(F_1, \dots, F_n)$ 写作为 $P(F_1, F_2, F_3, F^{n-3})$ 。从 Bianchi 等式和 (4.1.4) 式, $P(F^*)$ 满足

$$\xi P(F^*) = 0 \quad dP(F^*) = 0 \quad (4.1.5)$$

从 $dP(F^*) = 0$, 我们能定义一个 $(2n-1)$ -形式 $\omega^0_{2n-1}(A)$, 使

$$P(F^*) = d\omega^0_{2n-1}(A) \quad (4.1.6)$$

从 $\xi P(F^*) = 0$, 我们有

$$\xi \omega^0_{2n-1}(A) = -d\omega^1_{2n-2}(v, A) \quad (4.1.7)$$

又由 $\xi^2 = 0$,

$$\begin{aligned} \xi \omega^1_{2n-2} &= -d\omega^2_{2n-3} \\ \xi \omega^2_{2n-3} &= -d\omega^3_{2n-4} \\ &\vdots \\ \xi \omega^{2n-1}_{2n-1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

其中上标表 v 的幂次, 下标表 d 的幂次。方程 (4.1.6) ~ (4.1.8) 称为反常的递降方程, 简称为递降方程。 ω^1_{2n-2} 等同为 $(2n-2)$ -维中的反常。

定义单参数 1-形式:

$$A_t = t(A + v) \quad (4.1.9)$$

与之相应的场强为

$$F_t = (d + \xi)A_t + A_t^2 \quad (4.1.10)$$

注意 (4.1.10) 式是通常的场强定义的修改。

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = (d + \xi) \frac{\partial}{\partial t} A_t + \left[A_t, \frac{\partial A_t}{\partial t} \right] \equiv D_t \frac{\partial A_t}{\partial t} \quad (4.1.11)$$

很清楚我们有 Bianchi 等式

$$D_t F_t \equiv (d + \xi)F_t + [A_t, F_t] = 0 \quad (4.1.12)$$

现在,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} P(F, *) &= n P\left(\frac{\partial F_t}{\partial t}, F, {}^{*-1}\right) \\ &= n P\left(D_t \frac{\partial A_t}{\partial t}, F, {}^{*-1}\right) \\ &= n(d + \xi) P\left(-\frac{\partial A_t}{\partial t}, F, {}^{*-1}\right) \quad (4.1.13)\end{aligned}$$

上式两边对 t 从 0 到 1 进行积分得

$$P(F^*) = n(d + \xi) \int_0^1 dt P(A + v, F, {}^{*-1}) \quad (4.1.14)$$

记:

$$\omega_{2n-1}(A + v) = n \int_0^1 dt P(A + v, F, {}^{*-1}) \quad (4.1.15)$$

把 $\omega_{2n-1}(A + v)$ 按 v 的幂次展开:

$$\omega_{2n-1}(A + v) = \sum_{k=0}^{2n-1} \omega_{2n-1-k}^k(v, A) \quad (4.1.16)$$

那么利用 (4.1.15) 和 (4.1.16) 式我们可以求出递降方程中的 ω_{2n-1-k}^k 。例如对 $k=1$, 从 (4.1.15) 和 (4.1.16) 两式, 经过一定的计算可求得

$$\omega_{2n-2}^1(v, A) = n(n-1) \int_0^1 dt (1-t) P(v, d(AF, {}^{*-2})) \quad (4.1.17)$$

若考虑非阿贝尔规范场与自旋 1/2 的手征场耦合的情况, 对称不变多项式 P 正比于场强乘积的迹。因此得到一个归一化常数

$$\omega_{2n-2}^1 = n(n-1) \int_0^1 dt (1-t) \text{Str}(v d(AF, {}^{*-2})) \quad (4.1.18)$$

$$\text{例如, } n=2, \omega_2^1 = \text{tr}(v dA) \quad (4.1.19)$$

$$n=3, \omega_4^1 = \text{tr}\left[v d\left(AdA + \frac{1}{2}A^3\right)\right] \quad (4.1.20)$$

4.2 不确定性, 最简单的递降方程及“三角形”公式

很明显, 递降方程(4.1.6)~(4.1.8)中的微分形式并非唯一的。例如我们可以用 $\omega^0_{2n-1} + d\alpha$ 代替 ω^0_{2n-1} ; 用 $\omega^0_{2n-1} + \xi\alpha + d\beta$ 代替 ω^1_{2n-2} , 等等, 递降方程(4.1.6)~(4.1.8)仍然成立。不同的选择物理上是等价的。例如, 若两个反常的表达式相差某个局域表达式的 ξ , 那么与之对应的两个量子真空泛函在重新定义后是相同的。

我们能按如下方式来得到最简单的对递降方程中微分形式的选择。首先考虑单参数1-形式

$$A_t = tA + v \quad (4.2.1)$$

相应的场强

$$F_t = (d + \xi)A_t + A_t^2 = tdA + t^2A^2 + (1-t)dv \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = (d + \xi)\frac{\partial A_t}{\partial t} + \left[A_t, \frac{\partial A_t}{\partial t}\right] \equiv D_t \frac{\partial A_t}{\partial t} \quad (4.2.3)$$

Bianchi等式为:

$$D_t F_t = (d + \xi)F_t + [A_t, F_t] = 0 \quad (4.2.4)$$

现在,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} P(F_t^n) &= nP\left(-\frac{\partial F_t}{\partial t}, F_t^{n-1}\right) \\ &= nP\left(D_t \frac{\partial A_t}{\partial t}, F_t^{n-1}\right) \\ &= n(d + \xi) P\left(\frac{\partial A_t}{\partial t}, F_t^{n-1}\right) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

上式两边对 t 从 0 到 1 积分得:

$$P(F_1^*) - P(F_0^*) = n(d + \zeta) \int_0^1 dt P(A, F_t^{*-1}) \quad (4.2.6)$$

或

$$P(F^*) - P((dv)^*) = n(d + \zeta) \int_0^1 dt P[A, (tdA + t^2A^2 + (1-t)dv)^{*-1}] \quad (4.2.7)$$

上式右边能以 dv 的幂次进行展开

$$\begin{aligned} n \int_0^1 dt P[A, (tdA + t^2A^2 + (1-t)dv)^{*-1}] \\ = \hat{\omega}_{2n-1}^0 + \hat{\omega}_{2n-2}^1 + \cdots + \hat{\omega}_n^{n-1} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{2n-k-1}^k &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k!} \int_0^1 dt (1-t)^k \\ &\quad \cdot P((dv)^k, A, (tdA + t^2A^2)^{*-k-1}) \quad (4.2.9) \\ 0 \leq k \leq n-1 \end{aligned}$$

对 $k=0$ 我们得众所周知的 Chern-Simons 形式

$$\hat{\omega}_{2n-1}^0 = n \int_0^1 dt P[A, (tdA + t^2A^2)^{*-1}] \quad (4.2.10)$$

对 $k=1$ 我们得 $(2n-2)$ -维中反常的公式

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{2n-2}^1 &= n(n-1) \int_0^1 dt (1-t) \\ &\quad P[dv, A, (tdA + t^2A^2)^{*-1}] \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

为了得到对 $k > n-1$ 的形式, 我们考虑另一不同的单参数 1-形式:

$$A_t = tv \quad (4.2.12)$$

相应的场强为:

$$F_t = (d + \zeta)A_t + A_t^2 = t dv + (t^2 - t)v^2 \quad (4.2.13)$$

与上面的计算相似, 我们得

$$P(F_1^n) - P(F_0^n) = n(d + \xi) \int_0^1 dt P\left(\frac{\partial A_t}{\partial t}, F_t^{n-1}\right) \quad (4.2.14)$$

或

$$P((dv)^n) = n(d + \xi) \int_0^1 dt P[v, (tdv + (t^2 - t)v^2)^{n-1}] \quad (4.2.15)$$

上式右边可展开成 dv 的幂级数

$$\begin{aligned} & n \int_0^1 dt P[v, (tdv + (t^2 - t)v^2)^{n-1}] \\ &= \hat{\omega}_{n-1}^n + \hat{\omega}_{n-2}^{n+1} + \dots + \hat{\omega}_0^{2n-1} \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{n-l-1}^{n+l} &= (-1)^l \frac{(n-l)!n!}{(n-l-1)!(n+l)!} P[(dv)^{n-l-1}, \\ & \quad v, (v^2)^l] \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

$$0 \leq l \leq n-1$$

把(4.2.9)和(4.2.17)两式结合起来, 我们得满足与(4.1.6)~(4.1.8)式同样递降方程的 $\hat{\omega}_{2n-k-1}^k$ 。

当对称不变多项式 P 正比于场强乘积的迹时, 我们得到, 对 $n=2$,

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_3^0 &= \text{ctr}\left(A dA + \frac{2}{3} A^3\right) \\ \hat{\omega}_2^1 &= \text{ctr}(dvA) \\ \hat{\omega}_1^2 &= \text{ctr}(dvv) \\ \hat{\omega}_0^3 &= -\frac{c}{3} \text{tr} v^3 \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

归一化因子 $c = -\pi/4$ 。对 $n=3$,

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_5^0 &= \text{ctr} \left(A(dA)^2 + \frac{3}{5}A^5 + \frac{3}{2}A^3dA \right) \\
\hat{\omega}_4^1 &= \frac{c}{2} \text{tr} (dv(A dA + dAA + A^3)) \\
\hat{\omega}_3^2 &= \text{ctr}((dv)^2 A) \\
\hat{\omega}_2^3 &= \text{ctr}((dv)^2 v) \\
\hat{\omega}_1^4 &= -\frac{c}{2} \text{tr} (dvv^3) \\
\hat{\omega}_0^5 &= \frac{c}{10} \text{tr} v^5
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

归一化因子 $c = -i/24\pi^2$ 。注意到 ω_{2n-1}^0 与 $\hat{\omega}_{2n-1}^0$ 是恒等的。

ω 系列与 $\hat{\omega}$ 系列之间有什么样的关系呢？我们不难看到上节中的 ω 系列是通过单参数1-形式直接从0变到 $(A+v)$ 得到的，而 $\hat{\omega}$ 系列的单参数1-形式是分二步达到 $(A+v)$ 的，即先从0变到 v ，再从 v 变到 $(A+v)$ 。显然：

$$\hat{\omega}_{2n-1}(A+v, v, 0) \equiv \omega_{2n-1}(A+v, v) + \omega_{2n-1}(v, 0) \tag{4.2.20}$$

从而在 $\hat{\omega}$ 与 ω 系列间存在有下面的“三角形”关系

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_{2n-1}(A+v, v, 0) &= \omega_{2n-1}(A+v, 0) \\
&\quad + (d+\zeta)\chi(A+v, v, 0)
\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

其中：

$$\begin{aligned}
&\chi(A+v, v, 0) \\
&= n(n-1) \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 P(A, v, F_{t_1, t_2}^{-1})
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

$$\begin{aligned}
F_{t_1, t_2} &= (d+\zeta)A_{t_1, t_2} + A_{t_1, t_2}^2 \\
A_{t_1, t_2} &= t_2(A+v) + (1-t_1-t_2)v
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

把 (4.2.21) 式按 v 的幂次展开我们得:

$$\hat{\omega}_{2n-k-1}^k = \omega_{2n-k-1}^k + d\chi_{2n-k-2}^k + \xi\chi_{2n-k-1}^{k-1} \quad (4.2.24)$$

现在我们来证明 (4.2.21) 式。考虑内扞场:

$$A_{t_1, t_2} = t_1 A_1 + t_2 A_2 + (1 - t_1 - t_2) A_3$$

$$F_{t_1, t_2} = (d + \xi) A_{t_1, t_2} + A_{t_1, t_2}^2$$

定义 2-维奇算子 l_{t_1, t_2}

$$l_{t_1, t_2} A_{t_1, t_2} = 0 \quad l_{t_1, t_2} F_{t_1, t_2} = \delta A_{t_1, t_2} \quad (4.2.25)$$

其中

$$l_{t_1, t_2} = dt_1 k_{t_1} + dt_2 k_{t_2}$$

$$\delta = dt_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + dt_2 \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (4.2.26)$$

容易证明

$$l_{t_1, t_2} (d + \xi) + (d + \xi) l_{t_1, t_2} = \delta \quad (4.2.27)$$

或

$$(\xi + d) k_{t_1} + k_{t_1} (d + \xi) = \frac{\partial}{\partial t_1}$$

$$(d + \xi) k_{t_2} + k_{t_2} (d + \xi) = \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (4.2.28)$$

故有

$$(d + \xi) k_{t_1} k_{t_2} - k_{t_1} k_{t_2} (d + \xi) = -\frac{\partial}{\partial t_1} k_{t_2} - \frac{\partial}{\partial t_2} k_{t_1} \quad (4.2.29)$$

把 (4.2.29) 式作用到 $\text{tr} F_{t_1, t_2}^*$ 上并对 t_1-t_2 平面上由 $t_1 = 0, t_2 = 0, t_1 + t_2 = 1$ 所包围的三角形作积分我们有:

$$\text{左边} = (d + \xi) \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 k_{t_1} k_{t_2} \text{tr} F_{t_1, t_2}^* \quad (4.2.30)$$

$$\text{右边} = \iiint \left(-\frac{\partial}{\partial t_1} k_{t_2} - \frac{\partial}{\partial t_2} k_{t_1} \right) \text{tr} F_{t_1, t_2}^*$$

$$= \oint (dt_1 k_{t_2} + dt_2 k_{t_1}) \text{tr} F_{t_1, t_2}^*$$

$$\begin{aligned}
&= \omega_{2n-1}(A_1, A_3) - \omega_{2n-1}(A_1, A_2) - \omega_{2n-1}(A_2, A_3) \\
&= -\omega_{2n-1}(A_1, A_2) - \omega_{2n-1}(A_2, A_3) \\
&\quad - \omega_{2n-1}(A_3, A_1)
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

(4.2.30)式和(4.2.31)式意味着:

$$\begin{aligned}
&\omega_{2n-1}(A_1, A_2) + \omega_{2n-1}(A_2, A_3) + \omega_{2n-1}(A_3, A_1) \\
&= -(d + \xi) \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 k_{t_1} k_{t_2} \text{tr} F_{t_1, t_2}^* \\
&= n(n-1) (d + \xi) \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \text{Str}(A_2 - A_3, \\
&\quad A_3 - A_1, F_{t_1, t_2}^{*-2})
\end{aligned} \tag{4.2.32}$$

令上式中的 $A_1 = 0, A_2 = A + v, A_3 = v$, 我们得:

$$\begin{aligned}
&\omega_{2n-1}(A + v, v) + \omega_{2n-1}(v, 0) - \omega_{2n-1}(A + v, 0) \\
&= n(n-1) (d + \xi) \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \text{Str}(A, v, F_{t_1, t_2}^{*-2}) \\
&\equiv (d + \xi) \chi(A + v, v, 0)
\end{aligned} \tag{4.2.33}$$

(4.2.33) 意味着“三角形”关系 (4.2.21) 的成立性。

4.3 推广到非平庸主丛的情况

在4.1和4.2两节中, 我们得到了平庸主丛中反常的递降方程。在本节中我们将上述的结果推广到非平庸主丛, 使所得的结论在非平庸主丛上均成立。推广的办法是引入主丛上某个固定的背景连络(规范势) 1-形式 $\mathring{A}$ 。我们并不对 $\mathring{A}$ 进行任何变换, 即 $\xi \mathring{A} = 0$; 对应于 $\mathring{A}$ 的曲率(场强) 为 $\mathring{F} = d\mathring{A} + \mathring{A}^2$ 。

在引入了固定的背景连络形 $\mathring{A}$ 后, 则 4.1 节中单参数连络 1-形式的起点不再是 0, 而应是 $\mathring{A}$, 即 A_t 把 A 从 $\mathring{A}$ 变到 $(A + v)$

$$A_t = t(A+v) + (1-t)\mathring{A} \quad (4.3.1)$$

相应的曲率

$$F_t = (d+\zeta)A_t + A_t^2 \quad (4.3.2)$$

$$F_1 = (d+\zeta)(A+v) + (A+v)^2 = F$$

$$F_0 = d\mathring{A} + \mathring{A}^2 = \mathring{F}$$

故与 (4.1.14) 式对应我们有

$$\begin{aligned} P(F^*) - P(\mathring{F}^*) &= n(d+\zeta) \int_0^1 dt P(A+v-\mathring{A}, F_t^{*-1}) \\ &\equiv (d+\zeta) \omega_{2n-1}(A+v, \mathring{A}) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

用 v 的幂级数展开 $\omega_{2n-1}(A+v, \mathring{A})$

$$\omega_{2n-1}(A+v, \mathring{A}) = \sum_{k=0}^{2n-1} \omega_{2n-k-1}^k(A, v; \mathring{A}) \quad (4.3.4)$$

我们得

$$\begin{aligned} P(F^*) - P(\mathring{F}^*) &= d\omega_{2n-1}^0 \\ \zeta\omega_{2n-1}^0 &= -d\omega_{2n-2}^1 \\ &\vdots \\ \zeta\omega_{2n-1}^{2n-1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

(4.3.5) 式即为非平庸主丛上的递降方程，它们在主丛中处处成立；只有对平庸丛，我们才能选择 $\mathring{A} = 0$ ，此时 (4.3.5) 式化为通常的递降方程。

若我们如下选择单参数连络形 A_t 和 A_τ ： A_t 使 A 从 $\mathring{A}$ 变到 $\mathring{A}+v$ ，然后 A_τ 再使 A 使 $\mathring{A}+v$ 变到 $A+v$ ，则我们可以得到与 $\hat{\omega}$ 对应的非平庸主丛上的 $\hat{\omega}_{2n-k-1}^k(A, v; \mathring{A})$ ：

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{2n-1}(A+v, \mathring{A}+v, \mathring{A}) &\equiv \omega_{2n-1}(A+v, \mathring{A}+v) \\ &\quad + \omega_{2n-1}(\mathring{A}+v, \mathring{A}) \\ &= n \int_0^1 dt P(A-\mathring{A}, F_t^{*-1}) + n \int_0^1 d\tau P(v, F_\tau^{*-1}) \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$A_t = tA + (1-t)A_0 + v \quad A_r = rv + A_0$$

$$F_t = (d + \xi)A_t + A_t^2 \quad F_r = (d + \xi)A_r + A_r^2$$

$\hat{\omega}$ 与 ω 间的关系仍由三角形公式给出

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{2n-1}(A+v, \check{A}+v, \check{A}) \\ = \omega_{2n-1}(A+v, \check{A}) + (d + \xi)\chi(A+v, \check{A}+v, \check{A}) \end{aligned}$$

(4.3.7)

$$\begin{aligned} \chi(A+v, \check{A}+v, \check{A}) \\ = n(n-1) \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 P(A - \check{A}, v, F_{t_1, t_2}^{n-2}) \end{aligned}$$

(4.3.8)

$$\begin{aligned} F_{t_1, t_2} &= (d + \xi)A_{t_1, t_2} + A_{t_1, t_2}^2 \\ A_{t_1, t_2} &= t_1 \check{A} + t_2(A+v) + (1-t_1-t_2)(\check{A}+v) \end{aligned}$$

(4.3.9)

展开 (4.3.8) 式我们得

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{2n-k-1}(A, v; \check{A}) &= \omega_{2n-k-1}(A, v; \check{A}) \\ &+ d\chi_{2n-k-2}(A, v; \check{A}) + \xi\chi_{2n-k-1}(A, v; \check{A}) \end{aligned}$$

(4.3.10)

第 5 章

群上闭链及其在群表示论中的作用

5.1 规范群上同调及其与李代数上同调的联系

设 M 为某位形空间, M 上的点为 q ; 设 G 为 M 的变换群, G 的元素为 g ; 设 F_* 为点 q 和 n 个群元素 $g_1, \dots, g_n$ 的实值函数, 则 $F_*(q; g_1, \dots, g_n)$ 称为 n -上链。给定两个 n -上链 F^1_* 和 F^2_* , 它们的和

$$\begin{aligned} (F^1_* + F^2_*)(q; g_1, \dots, g_n) &\equiv F^1_*(q; g_1, \dots, g_n) \\ &\quad + F^2_*(q; g_1, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

也是一个 n -上链, 对这样的—个加法运算, n -上链构成—可加的阿贝尔群。

对每一个 n -上链 F_* , 我们可以定义—个运算 Δ , 若 Δ 满足下列的性质:

- I. ΔF_* 是一个 $(n+1)$ -上链;
- II. $\Delta(F^1_* + F^2_*) = \Delta F^1_* + \Delta F^2_*$;

$$\text{III. } \Delta(\Delta F_n) = 0.$$

则运算 Δ 称为上边缘算子。 ΔF_n 称为 F_n 的上边缘。那些满足 $\Delta F_n = 0$ 的 n -上链 F_n 称为 n -上闭链。

对规范群的情况，我们用 α_n 记 n -上链， $\alpha_n(A; g_1, \dots, g_n)$ ， (M 为规范势 A 的空间)。定义上边缘算子 Δ

$$\begin{aligned} (\Delta \alpha_n)(A; g_1, \dots, g_{n+1}) &= \alpha_n(A^{g_1}; g_2, \dots, g_{n+1}) \\ &- \alpha_n(A; g_1 g_2, g_3, \dots, g_{n+1}) + \dots + (-1)^i \alpha_n(A; g_1, \\ &\dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + \dots \\ &+ (-1)^{n+1} \alpha_n(A; g_1, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

我们能很容易地检验

$$\Delta^2 = 0 \quad (5.1.3)$$

因此 $\alpha_n(A; g_1, \dots, g_n)$ 称为 n -上链。若对某个 $(n-1)$ -上链，有 $\alpha_n = \Delta \alpha_{n-1}$ ，则 α_n 称为 n -上边缘。若 $\Delta \alpha_n = 0$ ，则 α_n 称为 n -上闭链。一个 n -上闭链是非平庸的，当且仅当它不能写成某个 $(n-1)$ -上链的上边缘。

对那些与单位元连通的群元素，我们定义若 n -上链的其中某一个宗量等于单位元，则此 n -上链恒为零。例如 $\alpha_n(A; e, g_2, \dots, g_n) = 0$ 等等。

下面我们将根据第 4 章中所得到的微分形式 $(\omega^{k_{2n-k-1}})$ 的积分来构造规范群的 n -上闭链 α_n 。当然我们的构造只在单位元的有限邻域内成立。

设 Δ^k 为群空间中的 k -单形，定义在 x -空间中的密度，

$$\Omega^{k_{2n-k-1}}(A; g_1, \dots, g_k) = \int_{\Delta^k} \omega^{k_{2n-k-1}}(g^{-1} \xi g, A) \quad (5.1.4)$$

则

$$\begin{aligned} (\Delta \Omega^{k_{2n-k-1}})(A; g_1, \dots, g_{k+1}) &\equiv \Omega^{k_{2n-k-1}}(A^{g_1}; g_2, \\ &\dots, g_{k+1}) - \Omega^{k_{2n-k-1}}(A; g_1 g_2, g_3, \dots, g_{k+1}) + \dots \\ &+ (-1)^i \Omega^{k_{2n-k-1}}(A; g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{k+1}) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{k+1} \Omega_{2n-k-1}^k(A; g_1, \dots, g_k) \\
& = \int_{\Delta^{k+1}} \omega_{2n-k-1}^k(g^{-1}\xi g, A) \quad (5.1.5)
\end{aligned}$$

Δ^{k+1} 为群空间中的 $(k+1)$ -单形, 它的边 $\partial \Delta^{k+1} = k$ -单形 V^k 的矢量和。利用 Stokes 定理和递降方程我们得:

$$\begin{aligned}
\Delta \Omega_{2n-k-1}^k & = \int_{\Delta^{k+1}} \omega_{2n-k-1}^k \\
& = \int_{\Delta^{k+1}} \xi \omega_{2n-k-1}^k \\
& = - \int_{\Delta^{k+1}} d\omega_{2n-k-2}^{k+1} \\
& = - d \int_{\Delta^{k+1}} \omega_{2n-k-2}^{k+1} \\
& = - d \Omega_{2n-k-2}^{k+1} \quad (5.1.6)
\end{aligned}$$

再把 Ω_{2n-k-1}^k 对无边的 $(2n-k-1)$ -维时空积分, 定义:

$$\alpha_k(A; g_1, \dots, g_k) = \int_{M_{2n-k-1}} \Omega_{2n-k-1}^k \quad (5.1.7)$$

则 α_k 是规范群的 k -上闭链:

$$\begin{aligned}
(\Delta \alpha_k)(A; g_1, \dots, g_{k+1}) & = \int_{M_{2n-k-1}} \Delta \Omega_{2n-k-1}^k \\
& = - \int_{M_{2n-k-1}} d \Omega_{2n-k-2}^{k+1} \\
& = - \int_{M_{2n-k-1}} \Omega_{2n-k-2}^{k+1} = 0 \quad (5.1.8)
\end{aligned}$$

同样对 $\hat{\omega}$ 系列我们可定义对应的 $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega}_{2n-k-1}^k(A; g_1, \dots, g_k) = \int_{\Delta^k} \hat{\omega}_{2n-k-1}^k(g^{-1}\xi g, A) \quad (5.1.9)$$

$$\begin{aligned}
(\Delta \hat{\Omega}_{2n-k-1}^k)(A; g_1, \dots, g_{k+1}) & \equiv \hat{\Omega}_{2n-k-1}^k(A^{g_1}; g_2, \\
& \dots, g_{k+1}) + \dots + (-1)^i \hat{\Omega}_{2n-k-1}^k(A; g_1, \dots, g_i, g_{i+1},
\end{aligned}$$

$$\cdots, g_{k+1}) + \cdots + (-1)^{k+1} \hat{\Omega}^k_{2n-k-1}(A; g_1, \cdots, g_k)$$

$$= \int_{\mathcal{A}^{k+1}} \hat{\omega}^k_{2n-k-1}(g^{-1}\xi g, A) \quad (5.1.10)$$

$\hat{\Omega}^k_{2n-k-1}$ 也满足:

$$\Delta \hat{\Omega}^k_{2n-k-1} = -d\hat{\Omega}^{k+1}_{2n-k-2} \quad (5.1.11)$$

由三角形公式可得 $\hat{\Omega}$ 与 Ω 之间的联系:

$$\hat{\Omega}^k_{2n-k-1} = \Omega^k_{2n-k-1} + dX^k_{2n-k-2} + \Delta X^{k+1}_{2n-k-1} \quad (5.1.12)$$

$$X^{k+1}_{2n-k-1} = \int_{\mathcal{A}^{k+1}} \chi^{k+1}_{2n-k-1}(g^{-1}\xi g, A) \quad (5.1.13)$$

故若我们定义:

$$\hat{\alpha}_k(A; g_1, \cdots, g_k) = \int_{M_{2n-k-1}} \hat{\Omega}^k_{2n-k-1} \quad (5.1.14)$$

则

$$\hat{\alpha}_k = \alpha_k + \Delta \beta_{k-1} \quad (5.1.15)$$

$$\beta_{k-1} = \int_{M_{2n-k-1}} X^{k+1}_{2n-k-1} \quad (5.1.16)$$

即 $\hat{\alpha}_k$ 与 α_k 之间仅相差某 β_{k-1} 的上边缘, $\hat{\alpha}_k$ 与 α_k 属于相同的上同调类, 它们上同调等价。故以后我们将不再区分 $\hat{\alpha}_k$ 与 α_k 。

5.2 群上闭链在群表示论中的应用

低维上闭链在群表示论中起着重要的作用。仍回到一般的

变换群 G 的情况，但我们仍把 n -上链记为 α_n 。 G 的元素 g 根据下面的规则变换 M 上的点 q ：

$$q \xrightarrow{g} q^g \quad (5.2.1)$$

在 M 上的函数 $\psi(q)$ 所构成的空间中，我们可赋予与 g 相对应的一个变换群 G 的表示 $U(g)$ 。 $U(g)$ 按下述方式来实现 (5.2.1) 式

$$U(g)qU^{-1}(g) = q^g \quad (5.2.2)$$

$U(g)$ 作用在 $\psi(q)$ 上表为：

$$U(g)\psi(q) = \psi(q^g) \quad (5.2.3)$$

且 $U(g)$ 满足结合律：

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2) \quad (5.2.4)$$

则 $U(g)$ 称为 G 的正规表示。然而我们可以在 (5.2.3) 式和 (5.2.4) 式中引入一些相因子，这样的相因子即为上闭链，它们必须满足一定的相容性条件。

作为 (5.2.3) 和 (5.2.4) 两式的最简单的推广，我们可以在表示的作用中引入一相因子 $\alpha_1(q, g)$

$$U(g)\psi(q) = e^{i\alpha_1(q, g)}\psi(q^g) \quad (5.2.5)$$

要求上式与 (5.2.4) 式自洽，则 α_1 须满足

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha_1)(q, g_1, g_2) \\ = \alpha_1(q^{g_1}, g_2) - \alpha_1(q, g_1g_2) + \alpha_1(q, g_1) \\ = 0 \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

即 $\alpha_1(q, g)$ 是一个1-上闭链，此时的 $U(g)$ 称为 G 的诱导表示。

若 α_1 是平庸的，即它为某个 α_0 的上边缘：

$$\alpha_1(q, g) = \alpha_0(q^g) - \alpha_0(q) = (\Delta\alpha_0)(q, g) \quad (5.2.7)$$

则在 (5.2.5) 式中的 α_1 可以通过重新定义去掉。证明如下：

(5.2.5) 式可重新写作为

$$e^{i\alpha_0(q)} U(g) e^{-i\alpha_0(q)} e^{i\alpha_0(q^g)} \psi(q) = e^{i\alpha_0(q^g)} \psi(q^g) \quad (5.2.8)$$

重新定义函数 $\psi'(q)$

$$\psi'(q) = e^{i\alpha_0(q)} \psi(q) \quad (5.2.9)$$

和算子 $U'(g)$

$$U'(g) = e^{i\alpha_0(g)} U(g) e^{-i\alpha_0(g)} \quad (5.2.10)$$

则带撇的量 $\psi'(q)$ 与 $U'(g)$ 满足 (5.2.3) 和 (5.2.4) 式。

当 $U(g)$ 对 $\psi(q)$ 的作用需要引入另一个算子 $\mathcal{A}_1(q; g)$ 时,

$$U(g)\psi(q) = \mathcal{A}_1(q; g)\psi(q') \quad (5.2.11)$$

我们可以得到另一种有趣的推广。若要求 $U(g)$ 满足 (5.2.4) 式, 则 $\mathcal{A}_1(q; g)$ 必须满足

$$\mathcal{A}_1(q; g_1)\mathcal{A}_2(q'; g_2) = \mathcal{A}_1(q; g_1g_2) \quad (5.2.12)$$

满足上式的 $\mathcal{A}_1$ 称为算子 1-上闭链。然而若在 (5.2.12) 式中引入一相因子 α_2 ,

$$\mathcal{A}_1(q; g_1)\mathcal{A}_2(q'; g_2) = e^{i\alpha_2(q; g_1, g_2)} \mathcal{A}_1(q; g_1g_2) \quad (5.2.13)$$

那么出现在上式中的 α_2 可以用来定义 G 的射影表示, 即 (5.2.4) 式修改为

$$U(g_1)U(g_2) = e^{i\alpha_2(g_1, g_2)} U(g_1g_2) \quad (5.2.14)$$

三重积的可结合性,

$$(U(g_1)U(g_2))U(g_3) = U(g_1)(U(g_2)U(g_3)) \quad (5.2.15)$$

要求 α_2 满足 2-上闭链条件:

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha_2)(q; g_1, g_2, g_3) &= \alpha_2(q'; g_2, g_3) - \alpha_2(q; g_1g_2, g_3) \\ &+ \alpha_2(q; g_1, g_2g_3) - \alpha_2(q; g_1, g_2) = 0 \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

若 α_2 可以写作某个 α_1 的上边缘, 即 α_2 是平庸的,

$$\begin{aligned} \alpha_2(q; g_1, g_2) &= (\Delta\alpha_1)(q; g_1, g_2) \\ &= \alpha_1(q'; g_2) - \alpha_1(q; g_1g_2) + \alpha_1(q; g_1) \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

那么这个平庸的 α_2 可以通过重新定义 $\mathcal{A}_1$ 或 $U(g)$ 去掉。

进一步的推广是可能的, 例如出现在 (5.2.13) 式中的相因子用算子 $\mathcal{A}_2$ 代替,

$$U(g_1)U(g_2) = \mathcal{A}_2(q; g_1, g_2)U(g_1g_2) \quad (5.2.18)$$

若要求 $U(g)$ 满足 (5.2.15) 式, 则 $\mathcal{A}_2$ 必须满足,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(q''; g_2, g_3)\mathcal{A}_2(q; g_1, g_2g_3) \\ = \mathcal{A}_2(q; g_1g_2, g_3)\mathcal{A}_2(q; g_1, g_2) \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

满足上式的 $\mathcal{A}_2$ 称为算子 2-上闭链。然而若允许在上式中出现一个相因子 α_3 ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(q''; g_2, g_3)\mathcal{A}_2(q; g_1, g_2g_3) \\ = e^{i\alpha_3(q; g_1, g_2, g_3)}\mathcal{A}_2(q; g_1g_2, g_3)\mathcal{A}_2(q; g_1, g_2) \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

则相因子 α_3 可以用来定义 G 的所谓不可结合的代表, 即 (5.2.15) 修改为

$$\begin{aligned} U(g_1)(U(g_2)U(g_3)) \\ = e^{i\alpha_3(q; g_1, g_2, g_3)}(U(g_1)U(g_2))U(g_3) \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

这里我们已假定了 $\mathcal{A}_2$ 与所有的 U 场对易。为使上式与非零的 α_3 自洽, 我们考虑 U 的四重乘积。一方面

$$\begin{aligned} U(g_1)(U(g_2)(U(g_3)U(g_4))) \\ = \mathcal{A}_2(q; g_3, g_4)U(g_1)(U(g_2)U(g_3g_4)) \\ = e^{i\alpha_3(q; g_1, g_2, g_3g_4)}(U(g_1)U(g_2))U(g_3g_4) \\ \quad \cdot \mathcal{A}_2(q; g_3, g_4) \\ = e^{i\alpha_3(q; g_1, g_2, g_3g_4)}(U(g_1)U(g_2))(U(g_3)U(g_4)) \\ = e^{i\alpha_3(q; g_1, g_2, g_3g_4)}\mathcal{A}_2(q; g_1, g_2)U(g_1g_2) \\ \quad \cdot (U(g_3)U(g_4)) \\ = e^{i\alpha_3(q; g_1, g_2, g_3g_4)}e^{i\alpha_2(q; g_1, g_2, g_3g_4)}\mathcal{A}_2(q; g_1, g_2) \\ \quad \cdot (U(g_1g_2)U(g_3))U(g_4) \\ = e^{i\alpha_3(q; g_1, g_2, g_3g_4) + i\alpha_2(q; g_1, g_2, g_3, g_4)} \\ \quad \cdot ((U(g_1)U(g_2))U(g_3))U(g_4) \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

另一方面

$$\begin{aligned}
U(g_1)(U(g_2)(U(g_3)U(g_4))) &= e^{i\alpha_3(q^{g^{-1}}, g_2, g_3, g_4)} \\
&\quad \cdot U(g_1)((U(g_2)U(g_3))U(g_4)) \\
&= e^{i\alpha_3(q^{g^{-1}}, g_2, g_3, g_4)} \mathcal{A}_2(q, g_2, g_3)U(g_1) \\
&\quad \cdot (U(g_2g_3)U(g_4)) \\
&= e^{i\alpha_3(q^{g^{-1}}, g_2, g_3, g_4) + i\alpha_2(q, g_1, g_2g_3, g_4)} \mathcal{A}_2(q, g_2, g_3) \\
&\quad \cdot (U(g_1)U(g_2g_3))U(g_4) \\
&= e^{i\alpha_3(q^{g^{-1}}, g_2, g_3, g_4) + i\alpha_2(q, g_1, g_2g_3, g_4)} \\
&\quad \cdot (U(g_1)(U(g_2)U(g_3)))U(g_4) \\
&= e^{i\alpha_3(q^{g^{-1}}, g_2, g_3, g_4) + i\alpha_3(q, g_1, g_2g_3, g_4) + i\alpha_3(q, g_1, g_2, g_3)} \\
&\quad \cdot ((U(g_1)U(g_2))U(g_3))U(g_4) \quad (5.2.23)
\end{aligned}$$

比较 (5.2.22) 和 (5.2.23) 两式可知四重积及高重积的自洽性要求 α_3 满足 3-上闭链条件,

$$\begin{aligned}
(\Delta\alpha_3)(q, g_1, g_2, g_3, g_4) &= \alpha_3(q^{g^{-1}}, g_2, g_3, g_4) \\
&\quad - \alpha_3(q, g_1g_2, g_3, g_4) + \alpha_3(q, g_1, g_2g_3, g_4) \\
&\quad - \alpha_3(q, g_1, g_2, g_3g_4) + \alpha_3(q, g_1, g_2, g_3) \\
&= 0 \pmod{2\pi} \quad (5.2.24)
\end{aligned}$$

若 α_3 是平庸的 3-上闭链, 即它可写作某个 2-上闭链 α_2 的上边缘

$$\begin{aligned}
\alpha_3(q, g_1, g_2, g_3) &= (\Delta\alpha_2)(q, g_1, g_2, g_3) \\
&= \alpha_2(q^{g^{-1}}, g_2, g_3) - \alpha_2(q, g_1g_2, g_3) \\
&\quad + \alpha_2(q, g_1, g_2g_3) - \alpha_2(q, g_1, g_2) \quad (5.2.25)
\end{aligned}$$

则这个平庸的 α_3 可以通过重新定义 $\mathcal{A}_2$ 或 U 去掉。

现在我们来考查对应于上面有关公式的无穷的代数关系。设变换群是连续群, 且有限的变换可由无穷小的生成元来表示。群元素 g 表为 $\exp(t^a\theta^a)$, θ^a 为无穷小参数, t^a 是群的厄米生成元, 满足 $[t^a, t^b] = if^{ab}t^c$ 。在不可结合的情况下, 我们假定群表示是“Power”可结合的, 即某给定量的 n -重积是很好定义

的。因此这个假定允许我们在考虑 $U(g)$ 为不可结合表示时仍可根据无穷小生成元 $\int d\mathbf{x} \theta^a(\mathbf{x}) G^a(\mathbf{x})$ 来表达有限的群表示 $U(g)$,

$$\begin{aligned} U(g) &= \exp\left(\int d\mathbf{x} \theta^a(\mathbf{x}) G^a(\mathbf{x})\right) \\ &= 1 + \int d\mathbf{x} \theta^a(\mathbf{x}) G^a(\mathbf{x}) + \dots \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

设所有群元素均是无穷小的,

$$\begin{aligned} g_1 &\approx 1 + t^a \theta_1^a & g_2 &\approx 1 + t^a \theta_2^a \\ g_1 g_2 &\approx 1 + t^a \theta_{12}^a, \dots \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

我们有:

$$\theta_{12}^a = \theta_1^a + \theta_2^a + F^{ab} \theta_1^b \theta_2^a + O(\theta_1^2, \theta_2^2) \quad (5.2.28)$$

其中 F^{ab} 为群的某个张量, 它的反对称化部分正好是结构常数 f^{abc} 的 i 倍。

展开2-和3-上闭链,

$$i\alpha_2(q; g_1, g_2) = \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \theta_1^a(\mathbf{x}) \theta_2^b(\mathbf{y}) J^{ab}(q; \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (5.2.29)$$

$$\begin{aligned} i\alpha_3(q; g_1, g_2, g_3) &= \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z} \theta_1^a(\mathbf{x}) \theta_2^b(\mathbf{y}) \theta_3^c(\mathbf{z}) \\ &\quad \cdot K^{abc}(q; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \dots \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

这里我们已用了事实: 每当 α_i 中的宗量之一为单位元时, 则 $\alpha_i = 0$ 。故在展开式 (5.2.29) 中没有二次以下的项, 在 (5.2.30) 式中没有三次以下的项。

从 (5.2.14) 式知, 2-上闭链的出现意味着

$$\begin{aligned} [G^a(\mathbf{x}), G^b(\mathbf{y})] &= i f^{abc} G^c(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &\quad + Z^{ab}(q; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

式中:

$$Z^{ab}(q; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = J^{ab}(q; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - J^{ba}(q; \mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (5.2.32)$$

因此生成元 G^a 并不构成李代数, 而是有一扩张。但自洽性条件 (5.2.15) 意味着 G^a 满足 Jacobi 等式,

$$[G^a(x), [G^b(y), G^c(z)]] + (\text{循环置换}) = 0 \quad (5.2.33)$$

当出现 3-上闭链时, 生成元的乘法是不可结合的, 因 (5.2.21) 式意味着,

$$\begin{aligned} G^a(x)(G^b(y)G^c(z)) - (G^a(x)G^b(y))G^c(z) \\ = K^{abc}(q; x, y, z) \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

故可得 Jacobi 等式不成立,

$$\begin{aligned} [G^a(x), [G^b(y), G^c(z)]] + (\text{循环置换}) \\ = Q^{abc}(q; x, y, z) \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

其中

$$\begin{aligned} Q^{abc}(q; x, y, z) = K^{abc}(q; x, y, z) - K^{bac}(q; y, x, z) \\ + K^{cab}(q; y, z, x) - \dots \end{aligned}$$

这样对应不可结合表示的无穷小生成元代数不满足 Jacobi 等式。

3-上闭链条件 (5.2.24) 对反常的 Jacobi 等式 (5.2.25) 强加一非平庸的约束, 因 (5.2.24) 式的无穷小形式为:

$$\begin{aligned} [G^a(x), Q^{bcd}(q; y, z, w)] - [G^b(y), Q^{acd}(q; z, w, x)] \\ + [G^c(z), Q^{abd}(q; w, x, y)] \\ - [G^d(w), Q^{abc}(q; x, y, z)] \\ - if^{abc}Q^{acd}(q; y, z, w)\delta(x-y) \\ + if^{bac}Q^{ada}(q; z, w, x)\delta(y-z) \\ - if^{cab}Q^{adb}(q; w, x, y)\delta(z-w) \\ + if^{cba}Q^{bda}(q; x, y, z)\delta(w-x) \\ - if^{dab}Q^{adb}(q; z, w, y)\delta(x-y) \\ + if^{dba}Q^{bda}(q; w, x, z)\delta(y-w) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

其中

$$[G^a(x), (\cdot)] = [G^a(x), q^b] \frac{\partial}{\partial q^b} (\cdot) \quad (5.2.37)$$

(5.2.36)式即为 Jacobi 反常项的约束条件。为使它更为一般且与Q的具体形式无关，我们利用 (5.2.35)式消去 (5.2.36)式中的Q，结果为一个四重约束等式：

$$\begin{aligned} & [G^a(x), [G^b(y), [G^c(z), G^d(w)]]] + (\text{循环置换}) \\ & \quad + (\text{循环置换}) \\ & = if^{abcd}\delta(x-y)\{[G^c(y), [G^c(z), G^d(w)]] \\ & \quad + (\text{循环置换})\} \\ & \quad - if^{bcdc}\delta(y-z)\{[G^c(z), [G^d(w), G^a(x)]] \\ & \quad + (\text{循环置换})\} \\ & \quad + if^{adca}\delta(z-w)\{[G^c(w), [G^a(x), G^b(y)]] \\ & \quad + (\text{循环置换})\} \\ & \quad - if^{acdb}\delta(w-x)\{[G^c(x), [G^b(y), G^c(z)]] \\ & \quad + (\text{循环置换})\} \\ & \quad + if^{cabd}\delta(x-z)\{[G^c(z), [G^d(w), G^b(y)]] \\ & \quad + (\text{循环置换})\} \\ & \quad - if^{badc}\delta(y-w)\{[G^c(w), [G^a(x), G^c(z)]] \\ & \quad + (\text{循环置换})\} \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

(5.2.38) 式即为反常Jacobi等式的一般的、重要的四重约束等式。

第 6 章

反常和规范群上调闭链

6.1 1-上闭链和Wess-Zumino-Witten项

在(量子)规范理论中, 1-上闭链出现于反常的 Lagrangian描述中。它反映了有效作用量(或称费米子行列式)的规范非不变性。考虑规范场与 Weyl 费米子相互作用的 Lagrangian,

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_i (\phi + \mathbf{A}) \psi + (\text{规范场动能项}) \quad (6.1.1)$$

这里 ψ 为手征(或称Weyl)费米子。泛函路径积分为

$$\int \mathcal{D}\overline{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(i \int dx \mathcal{L}) \quad (6.1.2)$$

若我们对耦合到规范场的手征费米子积分, 我们得有效作用量

$$W[A] = -i \ln \mathcal{D}[A] \quad (6.1.3)$$

$$\mathcal{D}[A] \equiv \det(\phi + \mathbf{A}) \quad (6.1.4)$$

定义一个量 $\alpha_1(A; g)$:

$$\mathcal{D}[A'] = e^{-i\alpha_1(A;g)} \mathcal{D}[A] \quad (6.1.5)$$

其中 A' 为 A 的规范变换: $A' = g^{-1}(A + d)g$ 。从群的结合律 $g_1 g_2 = g_{12}$, $g_{12} \equiv (g_1 g_2)$, 我们得

$$\mathcal{D}[(A^{g_1})^{g_2}] = \mathcal{D}[A^{g_1 g_2}] \quad (6.1.6)$$

故 $\alpha_1(A; g)$ 必须满足1-上闭链条件, 即 α_1 是1-上闭链。从而1-上闭链反映了有效作用量的规范非不变性。现设 g 是无穷小的,

$$g = 1 + \theta + \cdots \equiv 1 + t^a \theta^a + \cdots \quad (6.1.7a)$$

$$\delta_\theta A_\mu = D_\mu \theta \quad (6.1.7b)$$

$\mathcal{D}[A]$ 的改变为,

$$\begin{aligned} \delta_\theta \mathcal{D}[A] &= \mathcal{D}[A + D\theta] - \mathcal{D}[A] \\ &= \int dx (D_\mu \theta)^a \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} \mathcal{D}[A] \\ &= \int dx (D_\mu \theta)^a J^{\mu a}(x) \\ &= - \int dx \theta^a(x) (D_\mu J^{\mu a}(x))^* \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

$$J^{\mu a}(x) = \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \mathcal{D}[A] \quad (6.1.9)$$

另一方面从 (6.1.5) 式知 $\delta_\theta \mathcal{D}[A]$ 等于无穷小的1-上闭链, 故流散度反常为1-上闭链的无穷小形式。此外从1-上闭链条件, 我们看到在规范变换: $A \rightarrow A'$, $h \rightarrow g^{-1}h$ 下, $\alpha_1(A; h)$ 的变换方式为

$$\alpha_1(A; h) - \alpha_1(A'; g^{-1}h) = \alpha_1(A; g) \quad (6.1.10)$$

它与有效作用量 $W[A]$ 的变换方式

$$W[A] - W[A'] = \alpha_1(A; g) \quad (6.1.11)$$

完全相同, 因此我们可以把1-上闭链看作一个有效作用量, 它在规范变换下的变换方式与手征费米子有效作用量的变换方式相同。然而此时除了规范场 A 外, 还出现有另一“手征场”(或

称Goldstone玻色场) $\hbar$ 。这样的1-上闭链称为Wess-Zumino-Witten项 (或有效作用量)。

值得注意的是本节中出现的1-上闭链函数与在第5章讨论的群表示论中出现的1-上闭链函数稍有不同: 本节中的 α_1 并不是从一个算子对一个矢量的作用出现的。

6.2 2-上闭链和 Schwinger-Jackiw-Johnson项

在6.1节中我们看到, 1-上闭链出现在反常理论的Lagrangian描述中; 它反映手征费米子有效作用量的规范非不变性, 且可以等同于Wess-Zumino-Witten项; 1-上闭链的无穷小形式即为偶维时空中的流散度反常。

我们从5.1节中也知道, 有限的上闭链可以从出现于递降方程中的微分形式通过积分而得到。1-上闭链即为 ω^1_{2n-2} 的积分。除了 ω^1_{2n-2} 外, 递降方程中也出现了一些新的表达式 ω^2_{2n-3} , ω^3_{2n-4} 等等, 那么这些新的表达式对应的物理意义是什么呢? 我们知道, ω^2_{2n-3} 对奇维空间和群空间的积分即为2-上闭链, 而2-上闭链的出现又使变换群的表示是射影的。因此Faddeev从上同调的观点猜测在奇维空间中规范群生成元的对易子代数并不闭合, 而是会出现一反常的Schwinger-Jackiw-Johnson项。这表明在理论的Hamiltonian描述中, Gauss定律约束是反常的。

设第5章中的位形空间 M 是由规范场 $A_i^a(x)$ 构成的, 它的点为 $A = -it^a A_i^a(x) dx^i$; 变换群 G 是规范群, 它的元素为 $g(x)$; 群作用为: $A \rightarrow A^g = g^{-1}(A + d)g$ 。则规范群的表示 $U(g)$ 不是忠实的, 而是射影的:

$$U(g_1)U(g_2) = e^{i\pi \int A_1 g_1 g_2} U(g_1 g_2) \quad (6.2.1)$$

$\alpha_2(A; g_1, g_2)$ 满足2-上闭链条件。Faddeev由此猜测与时间无关的规范群表示 $U(g)$ 的生成元可等同为理论的 Hamiltonian 描述中的 Gauss 定律约束 $G^a(x)$;

$$G^a(x) = (D_i E_i(x))^a + J_0^a(x) \quad (6.2.2)$$

其中 $J_0^a(x) = \bar{\psi} \gamma_0 t^a \psi$ 是 Weyl 费米流的零分量, 它生成费米子部分的规范变换; $E_i^a(x)$ 是非阿贝尔电场 $F_{i0}^a(x)$, 它是正则坐标 $A_i^a(x)$ 的共轭动量的负。 $G^a(x)$ 生成完整的规范变换, 它也修改了规范场的自由度。从 (5.2.31) 式我们知约束 $G^a(x)$ 的对量关系中存在一反常项 $Z^{ab}(A; x, y)$:

$$[G^a(x), G^b(y)] = i f^{abc} G^c(x) \delta(x-y) + Z^{ab}(A; x, y) \quad (6.2.3)$$

$Z^{ab}(A; x, y)$ 即称为 Schwinger-Jackiw-Johnson 项。我们现在来计算三维空间中的 $Z^{ab}(A; x, y)$ 。起点是 Chern-Pontryagin 6-形式:

$$\Omega_6^{-1}(F) = -\frac{-i}{48\pi^3} \text{tr} F^3 \quad (6.2.4)$$

局域上 Ω_6^{-1} 是恰当的,

$$\Omega_6^{-1}(F) = d\Omega_5^0(A) \quad (6.2.5)$$

其中:

$$\Omega_5^0(A) = \frac{-i}{48\pi^3} \text{tr} \left(A(dA)^2 + \frac{2}{3} A^3 dA + \frac{3}{5} A^5 \right) \quad (6.2.6)$$

是 Chern-Simons 5-形式。从递降方程知, 存在有 3-形式 Ω_3^2 。因此我们定义泛函:

$$\alpha_2(A; g_1, g_2) = 2\pi \int_{S^1} \Omega_3^2 \quad (6.2.7)$$

很明显, α_2 是 S^2 上规范群的2-上闭链 (证明见第7章)。在单位元附近: $g_1 = 1 + u$, $g_2 = 1 + v$, 我们可以很容易地求出 α_2 ,

$$\alpha_2(A, u, v) = \frac{-i}{48\pi^2} e^{ijk} \cdot \int_{S^3} d^3x \operatorname{tr} \left[A_i \{ \partial_j u, \partial_k v \} \right] \quad (6.2.8)$$

从而可得出现在展开式 (5.2.29) 中的 J^{ab} ,

$$J^{ab}(A, x, y) = -\frac{-i}{48\pi^2} e^{ijk} \operatorname{tr} \{ t^a, t^b \} \cdot \partial_i A_j \partial_k \delta^3(x-y) \quad (6.2.9)$$

因此我们得:

$$\begin{aligned} Z^{ab}(A, x, y) &= J^{ab}(A, x, y) - J^{ba}(A, y, x) \\ &= \frac{-i}{24\pi^2} e^{ijk} \operatorname{tr} \{ t^a, t^b \} \\ &\quad \cdot \partial_i A_j \partial_k \delta^3(x-y) \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

即,

$$\begin{aligned} [G^a(x), G^b(y)] &= i f^{abc} G^c(x) \delta^3(x-y) \\ &\quad - \frac{i}{24\pi^2} e^{ijk} \operatorname{tr} \{ t^a, t^b \} \partial_i A_j \partial_k \delta^3(x-y) \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

(6.2.11) 式即是 Faddeev 猜测的出现在反常规范理论的 Hamiltonian 描述中, 约束 $G^a(x)$ 的对易子关系。

6.3 3-上闭链及其在 Hamiltonian 动力学中的物理实现

在第 5 章中我们看到非零 3-上闭链的出现使得有限群变换的表示是不可结合的, 在无穷小李代数的意义下, 生成元的 Jacobi 等式不再成立。那么是否存在场论的, 特别是规范理论

的例子, 其中一非零的3-上闭链出现? 这个问题很明显是非常重要的, 因为场论和规范理论是拓扑上人们感兴趣的理论。在本节中, 我们将考查反常规范理论在 Weyl 规范中量子化的正则体系。我们证明了当我们有非平庸的边界条件时, 我们能实现规范群非零的3-上闭链。3-上闭链的无穷小形式描述了静态规范变换生成元的Jacobi等式的破坏。

我们从反常规范理论的Hamiltonian动力学开始。

考虑Weyl费米子 ψ 最小耦合到非阿贝尔规范场 A_μ^a 的理论。在Weyl规范 $A_0 = 0$ 中, 理论的Hamiltonian定时描述经典上由Poisson括号,

$$\{E_i^a(x), A_j^b(y)\} = i\delta_{ij}\delta^{ab}\delta^3(x-y)$$

$$E_i^a = -\dot{A}_i^a,$$

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(x-y)$$

Hamiltonian和Gauss定律约束,

$$G^a(x) = (D_i E_i(x))^a + \psi^\dagger(x) t^a \psi(x) = 0 \quad (6.3.1)$$

给出。约束是时间无关的规范变换的生成元, 且满足如下Poisson括号关系

$$\{G(u), G(v)\} = G([u, v]) \quad (6.3.2)$$

这里我们已定义了符号

$$G(u) = \int_{R^3} u^a(x) G^a(x) d^3x \quad u = t^a u^a \quad (6.3.3)$$

积分是对空间 R^3 进行的。

在朴素的量子化中, 人们期望 $G^a(x)$ 满足简单的关系

$$[G(u), G(v)] = G([u, v]) \quad (6.3.4)$$

然而, 从6.2节我们知道, 在二次量子化费米场后, 对量关系

(6.3.4) 式是反常的, 即 (6.3.4) 式应为:

$$[G(u), G(v)] = G([u, v]) + \omega^2(A; u, v) \quad (6.3.5)$$

这里 $\omega^2(A; u, v)$ 是规范群李代数2-上闭链,

$$\begin{aligned}\omega^2(A; u, v) &= \frac{-i}{48\pi^2} \int_{R^3} \text{tr}(A(dudv - dvdu)) \\ &\equiv \int_{R^3} \omega_3^2(A; u, v)\end{aligned}\quad (6.3.6)$$

du 和 dv 是矩阵值的1-形式; 这里的 $\omega_3^2(A; u, v)$ 与6.2节中的相差一表面项。一般, ω^2 对变量 u 和 v 是反对称的和双线性的, 且它是 A 的多项式泛函。 ω^2 修改约束的Jacobi等式, 只要我们有非平庸的边条件。为此, 让我们来计算 $G(u)$ 的三重对易子。由 (6.3.5) 和 (6.3.6) 两式,

$$\begin{aligned}[G(u), [G(v), G(w)]] &\equiv G(u)(G(v)G(w) \\ &\quad - G(w)G(v)) - (G(v)G(w) - G(w)G(v)) \\ &= [G(u), G([v, w])] + \int_{R^3} \omega_3^2(A; v, w) \\ &= G([u, [v, w]]) + \int_{R^3} \omega_3^2(A; u, [v, w]) \\ &\quad + \int_{R^3} [G(u), \omega_3^2(A; v, w)]\end{aligned}\quad (6.3.7)$$

但

$$\begin{aligned}[G(u), \omega_3^2(A; v, w)] &\equiv [G(u), A] \\ &\quad \cdot \frac{\partial}{\partial A} \omega_3^2(A; v, w) = Du \cdot \frac{\partial}{\partial A} \omega_3^2(A; v, w) \\ &= \frac{d}{dt} \omega_3^2(A + tDu; v, w) \Big|_{t=0} \\ &\equiv \delta_u \omega_3^2(A; v, w)\end{aligned}\quad (6.3.8)$$

代入 (6.3.7) 式我们得

$$\begin{aligned}[G(u), [G(v), G(w)]] &= G([u, [v, w]]) \\ &\quad + \int_{R^3} \omega_3^2(A; u, [v, w]) \\ &\quad + \int_{R^3} \delta_u \omega_3^2(A; v, w)\end{aligned}\quad (6.3.9)$$

对 u, v 和 w 进行循环置换我们得到

$$\begin{aligned}
& [G(u), [G(v), G(w)]] + (\text{循环置换}) \\
&= \int_{R^3} \left\{ \delta_u \omega_s^2(A; v, w) + \delta_v \omega_s^2(A; w, u) \right. \\
&\quad + \delta_w \omega_s^2(A; u, v) + \omega_s^2(A; u, [v, w]) \\
&\quad + \omega_s^2(A; v, [w, u]) + \omega_s^2(A; w, [u, v]) \left. \right\} \\
&\equiv \int_{R^3} (\delta \omega_s^2)(A; u, v, w) \equiv \omega^3(A; u, v, w)
\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

这里 ω^3 实际上是 ω^2 的上边缘,

$$\begin{aligned}
\omega^3(A; u, v, w) &\equiv (\delta \omega^2)(A; u, v, w) \equiv \delta_u \omega^2(A; v, w) \\
&\quad + \delta_v \omega^2(A; w, u) + \delta_w \omega^2(A; u, v) \\
&\quad + \omega^2(A; u, [v, w]) + \omega^2(A; v, [w, u]) \\
&\quad + \omega^2(A; w, [u, v])
\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

δ 是规范群李代数上同调的上边缘算子。

由 (6.3.6) 和 (6.3.8) 式, 有

$$\begin{aligned}
\omega^3(A; u, v, w) &= -\frac{i}{48\pi^2} \int_{R^3} \text{tr}\{du, dv, dw\} \\
&= \frac{-i}{144\pi^2} \int_{R^3} (\text{tr}\{u, dv, dw\} - \text{tr}\{du, v, dw\} \\
&\quad + \text{tr}\{du, dv, w\})
\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

这里 $\{ , , \}$ 表对三个量的全反对称化。

若我们有平庸的边条件, 即场在无穷远处足够快地趋于零:

$$A_\mu \xrightarrow{r \rightarrow \infty} O(r^{-2}), \quad F_{\mu\nu} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} O(r^{-3}) \tag{6.3.13}$$

那么有效地, 空间 R^3 能紧致化为球 S^3 。因此在 (6.3.12) 式中的积分为零; 此时, 没有 3-上闭链, 我们正在处理一个可结合的代数; $G^*(\infty)$ 可以由作用在 Hilbert 空间上的线性算子来实现。

然而, 若理论中有非平庸边界效应, 例如在规范理论的磁单极区, 即场在无穷远处的行为是,

$$A_\mu \xrightarrow{r \rightarrow \infty} O(r^{-1}) \quad F_{\mu\nu} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} O(r^{-2}) \quad (6.3.14)$$

那么上面所用的空间紧致化不再适用, 空间 $\mathbf{R}^3$ 可看作单位盘, 它有光滑的边 $\partial\mathbf{R}^3 = S_\infty^2$ 。物理上 $\partial\mathbf{R}^3 = S_\infty^2$ 由所有 $||\vec{x}|| \rightarrow \infty$ 的点组成。这时, 我们有非零的3-上闭链:

$$\begin{aligned} \omega^3(A; u, v, w) &= \frac{-i}{144\pi^2} \int_{S_\infty^2} (\text{tr}\{u, dv, dw\} \\ &\quad - \text{tr}\{du, v, dw\} + \text{tr}\{du, dv, w\}) \\ &\equiv \int_{S_\infty^2} \omega_2^3(A; u, v, w) \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

读者也许想知道这个Jacobi等式的破坏为什么以前被人们忽略了? 原因是数学工作者一般只对紧致的无边流形感兴趣, 而物理学工作者认为全散度项可以扔掉! 但当我们有非平庸边界条件时, 表面(全散度)项起着重要的作用。我们会碰到一无穷小的非零的3-上闭链, 它使得理论的Jacobi等式不再成立。

由(6.3.11)式知 ω^3 是一个上边缘, 它平庸地满足3-上闭链条件,

$$\begin{aligned} (\delta\omega^3)(A; u, v, w, x) &\equiv \delta_+ \omega^3(A; v, w, x) \\ &\quad - \delta_+ \omega^3(A; w, x, u) + \delta_- \omega^3(A; x, u, v) \\ &\quad - \delta_- \omega^3(A; u, v, w) + \omega^3(A; [u, v], w, x) \\ &\quad - \omega^3(A; [v, w], x, u) + \omega^3(A; [w, x], u, v) \\ &\quad - \omega^3(A; [x, u], v, w) + \omega^3(A; [u, w], x, v) \\ &\quad - \omega^3(A; [v, x], u, w) = 0 \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

(6.3.16)式即反常Jacobi等式的自洽性条件, 把它写成 $G(u)$ 的四重积的形式即是(5.2.38)式:

$$\begin{aligned} &[G(u), [G(v), [G(w), G(x)]] + (\text{循环置换})] \\ &\quad + (\text{循环置换}) \\ &= [G([u, v]), [G(w), G(x)]] + (\text{循环置换}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [G([v, w]), [G(x), G(u)]] + (\text{循环置换}) \\
& + [G([w, x]), [G(u), G(v)]] + (\text{循环置换}) \\
& - [G([x, u]), [G(v), G(w)]] + (\text{循环置换}) \\
& + [G([u, w]), [G(x), G(v)]] + (\text{循环置换}) \\
& - [G([v, x]), [G(u), G(w)]] + (\text{循环置换})
\end{aligned}$$

(6.3.17)

接下来是理解不可结合性。为此目的，我们考虑有限的量，

$$U(g) = \exp G(u) \quad g = \exp u \quad (6.3.18)$$

它代表静态规范群的定时表示。然而，表示并非是忠实的，因从 (6.3.5) 式我们有，

$$U(g_1)U(g_2) = e^{i\alpha_2(A, g_1, g_2)} U(g_1g_2) \quad (6.3.19)$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha^2(A, g_1, g_2) = & \frac{-i}{24\pi^2} \int_{R^3} \int_{\Delta^2} \text{tr}((\hat{d}\hat{v})^2 (g^{-1}Ag \\
& + g^{-1}dg))
\end{aligned} \quad (6.3.20)$$

Δ^2 是群空间中以 e, g_1 和 g_1g_2 为顶点的 2-单形， $\hat{v} = g^{-1} \hat{d}g$ ，为 Maurer-Cartan 形式， $\hat{d}$ 表对群元 g 可依赖的参数的微分。在单位元的无穷小邻域， $g_1 \approx 1 + u, g_2 = 1 + v, \alpha^2(A, g_1, g_2)$ 化为 (6.3.6) 式。

考虑以两种不同方式结合的重积， $U(g_1)U(g_2)U(g_3)$ ，我们从 (6.3.19) 式得，

$$\begin{aligned}
& U(g_1)(U(g_2)U(g_3)) \\
& = e^{i\alpha_3(A, g_1, g_2, g_3)} (U(g_1)U(g_2))U(g_3)
\end{aligned} \quad (6.3.21)$$

这里 3-上闭链 α_3 实际上是 2-上链 α_2 的上边缘，

$$\begin{aligned}
\alpha_3(A, g_1, g_2, g_3) \\
= \alpha_2(A^{g_1}, g_2, g_3) - \alpha_2(A, g_1g_2, g_3) \\
+ \alpha_2(A, g_1, g_2g_3) - \alpha_2(A, g_1, g_2)
\end{aligned}$$

$$= (\mathcal{A} a_2)(A; g_1, g_2, g_3) \quad (6.3.22)$$

把 (6.3.20) 式代入上式给出

$$\begin{aligned} \alpha_3(A; g_1, g_2, g_3) = & -\frac{-i}{24\pi^2} \int_{R^3} \int_{\mathcal{A}^3} \text{tr}((d \hat{v})^2 \\ & \cdot (g^{-1}Ag + g^{-1}dg)) \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

$\mathcal{A}^3$ 是群空间中以 e, g_1, g_1g_2 和 $g_1g_2g_3$ 为顶点的 3-单形; $\partial\mathcal{A}^3$ 表 $\mathcal{A}^3$ 的边。由 Stokes 定理, (6.3.23) 式变为

$$\begin{aligned} \alpha_3(A; g_1, g_2, g_3) &= -\frac{-i}{24\pi^2} \int_{R^3} \int_{\mathcal{A}^3} \hat{d} \text{tr}((d \hat{v})^2 (g^{-1}Ag + g^{-1}dg)) \\ &= -\frac{-i}{24\pi^2} \int_{R^3} \int_{\mathcal{A}^3} d \text{tr}((d \hat{v})^2 \hat{v}) \\ &= -\frac{-i}{24\pi^2} \int_{R^3} \int_{\mathcal{A}^3} \text{tr}((d \hat{v})^2 \hat{v}) \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

当我们将有零边条件时, (6.3.24) 式中的积分为零, 3-上闭链为零, 表示是可结合的。若我们有非平庸的边条件, 我们得到,

$$\alpha_3(A; g_1, g_2, g_3) = -\frac{-i}{24\pi^2} \int_{S_\infty^2} \int_{\mathcal{A}^3} \text{tr}((d \hat{v})^2 \hat{v}) \quad (6.3.25)$$

S_∞^2 是由空间无穷远点构成的边界球面。(6.3.25) 式导致不可结合表示 (6.3.21) 式。当 g_1, g_2 和 g_3 足够接近于单位元时, (6.3.25) 式约化为 (6.3.15) 式。然而, 必须指出 (6.3.19) 式到 (6.3.25) 式只是局域地, 在单位元附近成立。

总之, 我们已在基本的 Hamiltonian 动力学中实现了规范理论非零的 3-上闭链。3-上闭链只由规范场在无穷远处的边界值决定; 若我们有平庸的边条件, 那么 3-上闭链为零。为了避免误解, 我们强调上面的非零 3-上闭链的出现是由纯粹代数

的，形式上的处理建立起来的，我们并没有引入泛函 Hilbert 空间。

在杂化手征袋模型的边界上，我们也能实现非零的3-上闭链。此时Jacobi等式的破坏是由场的奇异性引起的，而不是由场在无穷远处的边界条件引起的。我们考虑在 $(3+1)$ -维中的 $SU(3) \times SU(3)$ 手征袋 $B = V^3 \times S^1$ ，袋的形状是任意的。三维区域 V^3 有光滑边界 ∂V^3 ， ∂V^3 不必是单连通的。袋内填满 Dirac 费米子 ψ ，在袋外我们有 $SU(3)$ Skyrme 米子。忽略 Skyrme 项，袋外 Skyrme 米子的作用量为

$$S = \int_{V \times S^1} d^4x \text{tr}(I^\mu I_\mu) + 2\pi i \int_{V \times S^1 \times [0,1]} d^5x \Omega_5^0 \quad (6.3.26)$$

其中，

$$\Omega_5^0 = \frac{-i}{480\pi^3} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho\delta} \text{tr}(I_\mu I_\nu I_\sigma I_\rho I_\delta)$$

$$I_\mu = -it^a I_\mu^a = U^{-1} \partial_\mu U$$

$$U(x) = \exp(2it^a q^a(x))$$

流 I_μ 满足约束： $\partial_\mu I_\nu - \partial_\nu I_\mu + [I_\mu, I_\nu] = 0$ ， $\bar{V}^3$ 是 V^3 的补余部分，即 $V^3 \times S^1 + \bar{V}^3 \times S^1 = R^3 \times S^1$ 为整个时空； $q^a(x)$ 为手征相角。

利用(6.3.26)式我们能得到袋外 Skyrme 米子的运动方程

$$\partial_\mu I_\mu^a = 2\pi i (\omega^1_a)^a \quad (6.3.27)$$

$$(\omega^1_a)^a = \frac{-i}{96\pi^3} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho\delta} \text{tr}(t^a I_\mu I_\nu I_\sigma I_\rho) \quad (6.3.28)$$

因(6.3.26)式中的第二项(即 Wess-Zumino-Witten 项)只包含时间的一次导数，因此在正则体系中，对应于(6.3.26)

式的Hamiltonian为

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \operatorname{tr}(I_0(x)I_0(x) + I_R(x)I_R(x)) \quad (6.3.29)$$

为了能在正则体系中得到运动方程 (6.3.27), 我们必须假定如下的流-流对易关系:

$$\begin{aligned} [I_0^a(x), I_0^b(y)] &= if^{abc}I_0^c(x)\delta^3(x-y) \\ &\quad + 2\pi i(\omega_3^2)^{ab}(x)\delta^3(x-y) \end{aligned} \quad (6.3.30a)$$

$$\begin{aligned} [I_0^a(x), I_k^b(y)] &= if^{abc}I_k^c(x)\delta^3(x-y) \\ &\quad + i\delta^{ab}\partial_k\delta^3(x-y) \end{aligned} \quad (6.3.30b)$$

$$[I_i^a(x), I_j^b(y)] = 0 \quad (6.3.30c)$$

其中

$$\begin{aligned} (\omega_3^2)^{ab}(x) &= \frac{-i}{96\pi^3} \varepsilon^{ijkl} \operatorname{tr}(t^a[t^b, I_i]I_jI_k \\ &\quad - t^b[t^a, I_i]I_jI_k) \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

为2-上闭链。

引入所谓的“Sineared流”,

$$I_0(u) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x I_0^a(x)u^a(x) \quad (6.3.32)$$

(6.3.30a) 式可写作为

$$\begin{aligned} [I_0(u), I_0(v)] &= I_0([u, v]) \\ &\quad + 2\pi i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x u^a(x)(\omega_3^2)^{ab}(x)v^b(x) \end{aligned} \quad (6.3.33)$$

则利用 (6.3.30) 式, 通过冗长的但直接的计算给出

$$\begin{aligned} [I_0(u), [I_0(v), I_0(w)]] + (\text{循环置换}) \\ = 2\pi \int_{\mathbb{R}^3} d^3x (\omega_2^3)_i(x) \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

$$(\omega_2^3)_i(x) = \frac{-i}{96\pi^3} \varepsilon^{ijkl} \operatorname{tr}(u[v, w]I_jI_k$$

$$\begin{aligned}
& + v[w, u]I, I_1 + w[u, v]I, I_1 - [u, v]I, wI_1 \\
& - [v, w]I, uI_1 - [w, u]I, vI_1) \quad (6.3.35)
\end{aligned}$$

这样我们看到在袋的边界上存在有非零的Jacobi 等式反常。

上面的分析也能推广到规范化的非线性 σ -模型中去。

6.4 不可结合代数和反常 Jacobi 等式的约束

当无穷小生成元的3-重Jacobi等式不成立即代数不可结合时，我们可以强加一个四重约束等式。这个四重约束等式的有限形式即为3-上闭链条件。我们在第5章中已经得到了这样的四重约束等式。写成比较紧致的形式，它就是 (6.3.17) 式。

若只说代数的不可结合性，数学上有一种很好定义的不可结合代数——Malcev代数。但与Malcev代数对应的有限不可结合表示，并不联系到非零3-上闭链的存在性。为暴露出我们这里讨论的联系到非零3-上闭链的存在性的不可结合代数与Malcev代数的差别，我们在本节中把Malcev代数作一简单的介绍。

在研究不满足结合的可结合律的代数结构过程中，常常引入的概念是结合子的概念。给定代数的三个元素 a, b, c ，它们的结合子 $[a, b, c]$ 定义为：

$$[a, b, c] = (ab)c - a(bc) \quad (6.4.1)$$

对可结合的代数，结合子 $[a, b, c]$ 恒为零。一个交替代数 A 定义为一个代数，其中如下的等式成立：

$$[a, a, b] = 0 \quad (6.4.2a)$$

$$[b, a, a] = 0 \quad (6.4.2b)$$

用 $(a+c)$ 代替 (6.4.2a) 中的 a ，我们得

$$[a, c, b] + [c, a, b] = 0 \quad (6.4.3)$$

对 (6.4.2b) 我们类似地有:

$$[b, a, c] + [b, c, a] = 0 \quad (6.4.4)$$

这样在交替代数中, 结合子 $[a, b, c]$ 是它的宗量的一个交替函数。应用结合子的上述性质, 我们可以推得交替代数的如下 Moufang 等式:

$$(aba)c = a(b(ac)) \quad (6.4.5)$$

$$c(aba) = ((ca)b)a \quad (6.4.6)$$

$$(ab)(ca) = a(bc)a \quad (6.4.7)$$

由交替性, $(aba) = (ab)a = a(ba)$ 。为了证明 (6.4.5) 式, 我们只需要证明 $(aba)c - a(b(ac))$ 等于零。利用结合子和交替代数的性质,

$$\begin{aligned} (aba)c - a(b(ac)) &= [ab, a, c] + [a, b, ac] \\ &= -[a, ab, c] - [a, ac, b] \\ &= -(a^2b)c + a((ab)c) - (a^2c)b + a((ac)b) \\ &= -[a^2, b, c] - a^2(bc) - [a^2, c, b] - a^2(cb) \\ &\quad + a((ab)c) + a((ac)b) \\ &= a(-c(bc) - a(cb) + (ab)c + (ac)b) \\ &= a([a, b, c] + [a, c, b]) = 0 \end{aligned}$$

等式 (6.4.6) 也可类似地加以证明。为证明 (6.4.7) 式, 我们考虑:

$$\begin{aligned} (ab)(ca) - a(bc)a &= [a, b, ca] + a(b(ca)) - a(bc)a \\ &= [a, b, ca] - a[b, c, a] \\ &= -[a, ca, b] - a[b, c, a] \\ &= -(aca)b + a((ca)b) - a[b, c, a] \\ &= -(aca)b + a((ca)b) - a[b, c, a] \\ &= -(aca)b + a(c(ab)) = 0 \end{aligned}$$

给定一个交替代数 A , 我们能定义一个新的代数 A^- , 其中乘积为反对称积即对易子。那么 A^- 并非李代数。这是因为在 A^-

中, Jacobi 等式不成立。Jacobian $J(a, b, c)$ 定义为:

$$J(a, b, c) \equiv [[a, b], c] + [[c, a], b] + [[b, c], a] \quad (6.4.8)$$

可以证明 $J(a, b, c)$ 正比于结合子:

$$J(a, b, c) = 6[a, b, c] \quad (6.4.9)$$

这样得到的代数 A^- 称为 Malcev 代数。一个 Malcev 代数由一个反对称积“ $*$ ”,

$$a * b = -b * a \quad (6.4.10)$$

和一个四阶等式 (Malcev 等式)

$$(a * b) * (a * c) = ((a * b) * c) * a + ((b * c) * a) * a + ((c * a) * a) * b \quad (6.4.11)$$

定义。为了证明当把反对称积 $*$ 取作对易子时代数 A^- 满足 Malcev 等式, 我们应用 Moufang 等式 (6.4.7)。为此我们首先证明 (6.4.11) 等价于下面一个等式:

$$J(a, b, a * c) = J(a, b, c) * a \quad (6.4.12)$$

我们有:

$$J(a, b, a * c) = (a * b) * (a * c) + ((a * c) * a) * b + (b * (a * c)) * a$$

利用 (6.4.11) 式我们得

$$J(a, b, a * c) = J(a, b, c) * a$$

这样我们证明了 (6.4.12) 式。

因在 A^- 中, 乘积 $*$ 即为对易子, 故我们得

$$J(a, b, [a, c]) = [J(a, b, c), a] \quad (6.4.13)$$

这样我们得 A^- 的 Malcev 等式。Malcev 代数对应于李代数的推广。它很自然地由交替代数得到。

现在我们可以看到对应于非零 3-上闭链的不可结合代数与 Malcev 代数的差别了。首先, Malcev 代数是一个交替代数。而在我们的情况下, 生成元的不可结合性是联系到非零 3-上闭链的存在性及有限群表示的不可结合性的。由于当 α^3 中的任两

个群元素相同时, α^3 并不为零, 故我们容易验证生成元并不满足交替性。因此我们的代数并非交替代数。其次, 在 Malcev 代数中, Malcev 等式可从交替代数本身通过引入对易子而自然地得到。而我们推得的四重约束等式 (6.3.17) 是 3-上闭链条件的无穷小形式, 它是一个自洽性等式且它不能从代数本身得到。由此可见, 有限不可结合表示的生成元并不构成 Malcev 代数。Malcev 等式不能看作我们在前些节中得到的反常 Jacobian 的约束。

作为我们得到的四重约束等式的简单应用, 我们考虑侯伯字, 侯伯元和王珮在文献中提出的一个体系。在这个体系中, 他们引入了所谓“与膜相关的波函数”的概念且他们用膜相关的波函数实现了平移群的 3-上闭链。在他们的体系中, 不可结合性是由一个 3-形式“场强”对由膜所环绕的体积的积分来测量的。反常的 Jacobi 等式为:

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\sigma]] + (\text{循环置换}) = J_{\mu\nu\sigma} \quad (6.4.14)$$

D_μ 是有限平移群的无穷小生成元。 $J_{\mu\nu\sigma}$ 是 3-形式场强的分量。 D_μ 满足

$$[D_\mu, D_\nu] = L_{\mu\nu} \quad (6.4.15)$$

$L_{\mu\nu}$ 为生成膜相关波函数的算子的无穷小生成元。在平庸的 3-上闭链的情况下, $L_{\mu\nu}$ 约化为场强 2-形式的分量 $F_{\mu\nu}$ 。四阶约束等式对反常的 Jacobian $J_{\mu\nu\sigma}$ 强加一约束。在平移群的情况下, 因结构常数为零, 结果约束非常简单:

$$\begin{aligned} 0 &= [D_\mu, [D_\nu, [D_\sigma, D_\rho]] + (\text{循环置换})] \\ &\quad + (\text{循环置换}) \\ &= [D_\mu, J_{\nu\sigma\rho}] - [D_\nu, J_{\sigma\rho\mu}] + [D_\sigma, J_{\rho\mu\nu}] \\ &\quad - [D_\rho, J_{\mu\nu\sigma}] \\ &= \partial_\mu J_{\nu\sigma\rho} - \partial_\nu J_{\sigma\rho\mu} + \partial_\sigma J_{\rho\mu\nu} - \partial_\rho J_{\mu\nu\sigma} \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad (6.4.16)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\rho J_{\nu\sigma\mu} = 0 \quad (6.4.17)$$

引入微分形式: $J = J_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, 则上式可简写为:

$$dJ = 0 \quad (6.4.18)$$

这样约束要求3-形式场强为闭的。局域上 J 可写作某2-形式 F 的外微分: $J = dF$ 。然而在整体上 $J \neq dF$ 。

一个 $J = dF$ 的例子是一个非相对论性电子在背景磁单极场中运动的量子力学。让 V_i 为协变速度, 那么反常的Jacobi等式为

$$\varepsilon^{ijk} [V_i, [V_j, V_k]] = ie\varepsilon^{ijk} \partial_i F_{jk} \alpha \delta^3(x) \neq 0 \quad (6.4.19)$$

这里我们已设磁单极在原点的位置。“磁荷密度” F_{ij} 为:

$$[V_i, V_j] = ieF_{ij} \quad (6.4.20)$$

我们看到 (6.4.19) 平庸地满足约束等式 (6.4.18)。

第 7 章

2-上闭链与规范群的扩张

7.1 二维反常规范理论中的Kac-Moody群

近来,人们对数学物理理论中的一些无穷维李代数有极大的兴趣。无穷维代数的一个例子是 Kac-Moody 代数。Kac-Moody代数(也称loop代数)出现在二维时空的非阿贝尔反常理论中。代数的中心扩张称为对易子反常,因而可联系到规范群李代数上同调的2-上闭链。与无穷小规范变换相应的是有限的规范变换;因此我们有必要考查与Kac-Moody代数对应的群。人们发现,构造 Kac-Moody 群存在有拓扑阻碍,即我们不能把扩张群(Kac-Moody群)看成底和纤维的乘积,而是应把它定义为非平庸的纤维丛。故我们要引入局域坐标系。我们现在首先来构造二维反常规范理论中loop群的中心扩张: $U(1) \rightarrow \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, Γ 为loop群, $\hat{\Gamma}$ 为扩张群。

设 G 为一紧致李群, $Lie G$ 为它的李代数。设 $\langle a, b \rangle$ 为 $Lie G$ 上的不变双线性形。在一维空间中,反常规范理论中对易子反常

的最简单的选择给出Kac-Moody代数形式 $Lie\hat{G} = Map(S^1, LieG) \oplus i\mathbb{R}$ 的流代数($Map(S^1, M) = C^\infty$ 映射: $S^1 \rightarrow M$ 构成的loop空间)。其对易关系为

$$[u, v](x) = [u(x), v(x)] + ic \int_{S^1} \langle u, v' \rangle dx \quad (7.1.1)$$

$u, v \in Map(S^1, LieG)$, c 为一实常数, $i\mathbb{R}$ 与所有的东西对易。我们来构造群 $\hat{\Gamma}$, 使它的李代数为 $Lie\hat{G}$ 。为此, 我们假定 $\hat{\Gamma}$ 的如下乘法规则:

$$(g_1, \lambda)(g_2, \mu) = (g_1 g_2, \lambda \mu e^{2\pi i \hat{\alpha}(g_1, g_2)}) \quad (7.1.2)$$

$\lambda, \mu \in U(1)$, $g_1, g_2 \in \Gamma = Map(S^1, G)$, (loop群), $\hat{\alpha}$ 为 g_1 和 g_2 的实函数, 乘积 $g_1 g_2$ 按Pointwise定义。

让我们现在来构造 $\hat{\alpha}$ 。为简便计, 我们考虑 $G = SU(2)$ 的情况。局域上, $\hat{\alpha}$ 能从下降方程得到, 起点是在四维中 (S^4 中) 的Chern-Pontryagin密度:

$$\Omega_4^{-1}(F) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{tr} F^2 \quad (7.1.3)$$

$\Omega_4^{-1}(F)$ 的四维积分为第二陈数 Z 。让 i 表某特定的规范, $i = A^{g_1 \cdots g_i} \equiv (g_1 \cdots g_i)^{-1} (A + d) (g_1 \cdots g_i)$ 。局域上, Ω_4^{-1} 是恰当的,

$$\Omega_4^{-1}(F) = d\Omega_3^0(A) \equiv d\Omega_3^0(0) \quad (7.1.4)$$

其中

$$\Omega_3^0(0) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{tr} (AdA + \frac{2}{3} A^3) \quad (7.1.5)$$

是Chern-Simons 密度。取 (7.1.4) 式的上边运算 Δ 给出 $d\Delta\Omega_3^0(0) = 0$, 我们假定了 d 与 Δ 对易。这样局域上,

$$(\Delta\Omega_3^0)(0, 1) \equiv \Omega_3^0(1) - \Omega_3^0(0) = d\Omega_2^1(0, 1) \quad (7.1.6)$$

应用 $\Delta^2 = 0$, 我们从上式得 $d\Delta\Omega_2^1 = 0$, 故 $\Delta\Omega_2^1$ 是恰当的:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}\Omega_2^1)(0,1,2) &\equiv \Omega_2^1(1,2) - \Omega_2^1(0,2) + \Omega_2^1(0,1) \\ &= d\Omega_2^1(0,1,2)\end{aligned}\quad (7.1.7)$$

类似地, $\mathcal{L}\Omega_1^2$ 是恰当的,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}\Omega_1^2)(0,1,2,3) &\equiv \Omega_1^2(1,2,3) - \Omega_1^2(0,2,3) \\ &\quad + \Omega_1^2(0,1,3) - \Omega_1^2(0,1,2) \\ &= d\Omega_1^2(0,1,2,3)\end{aligned}\quad (7.1.8)$$

方程 (7.1.6) ~ (7.1.8) 式即为递降方程。

现在让我们考虑限于三维 (S^3) 中的 (7.1.6) 式。把从 (7.1.6) 式得到的 Ω_2^1 进一步限制到二维 (S^2) 中, 我们得到在二维中的非阿贝尔反常 Ω_2^1 。类似地考虑限制于二维中的 (7.1.7) 式, 然后把 Ω_2^1 限制到一维 (S^1); 那么我们能定义上链:

$$\hat{\alpha} = \int_{S^1} \Omega_1^2 \quad (7.1.9)$$

现在, 上闭链 $\hat{\alpha}$ 可如下定义: Ω_0^3 的上边缘为

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}\Omega_0^3)(0,1) &= \Omega_0^3(1) - \Omega_0^3(0) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} d\text{tr}(Adgg^{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{24\pi^2} \text{tr}(dgg^{-1})^3\end{aligned}\quad (7.1.10)$$

最后一项 $c^{(3)} = \frac{1}{24\pi^2} \text{tr}(dgg^{-1})^3$ 为闭的, 这样局域上 $c^{(3)} = dH^{(2)}$, $H^{(2)}$ 为某 2-形式。为计算 $H^{(2)}$, 我们考虑集合 $B = \left\{ X \in \text{Lie } G \mid \frac{1}{2} \text{tr} X^2 < \pi^2 \right\}$ 和 $G_1 = SU(2)/\{-1\}$; 那么指数映射: $B \rightarrow G_1$ 是 1-1 的和 C^∞ 的, 球 $\text{tr} X^2 = 2\pi^2$ 映射到点 -1 。设 g 为某从 4-维中 2-维球到 G_1 的映射, 那么我们能定义对数 $\ln g$: $S^2 \rightarrow B$ 。把这样的 g 写作为 $\exp(u)$, 则我们能从下式计算 $H^{(2)}$,

$$H^{(2)}(\ln g) = \frac{1}{24\pi^2} \int_0^1 \text{tr}(dg(x,t)g(x,t)^{-1})^3 \quad (7.1.11)$$

$$g(x, t) = \exp(tu(x))$$

这样我们得2-维中的非阿贝尔反常,

$$\begin{aligned} \Omega_2^1(0, 1) \equiv \Omega_2^1(\tilde{A}, \tilde{A}^{\sim}) &= -\frac{1}{8\pi^2} \operatorname{tr}(\tilde{A} d\tilde{g} \tilde{g}^{-1}) \\ &+ H^{(2)}(\ln \tilde{g}) \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

($\tilde{Q}$ 表限制在2-维中的量 Q)。类似地,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\Omega_2^1)(0, 1, 2) &\equiv \Omega_2^1(1, 2) - \Omega_2^1(0, 2) + \Omega_2^1(0, 1) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \operatorname{tr}(\tilde{g}_1^{-1} d\tilde{g}_1 d\tilde{g}_2 \tilde{g}_2^{-1}) + H^{(2)}(\ln \tilde{g}_1) \\ &+ H^{(2)}(\ln \tilde{g}_2) - H^{(2)}(\ln \tilde{g}_1 \tilde{g}_2) \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

我们看到 $\mathcal{A}\Omega_2^1$ 并不依赖于 $\tilde{A}$, 这是递降方程在2-维理论中的一特定性质。

设 D^2 为四维中的2-维盘。那么任何 $\tilde{g}: D^2 \rightarrow G_1$ 均能限制为 $g: \partial D^2 \rightarrow G_1$, 这里 ∂D^2 表 D^2 的边。我们将考虑 $S^1 = \partial D^2$ 的情况。设 $\tilde{g}_1$ 和 $\tilde{g}_2$ 为 G_1 中的两个盘使得 $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2: D^2 \rightarrow G_1$, 则我们能定义:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_2(g_1, g_2) &= \int_{D^2} (\mathcal{A}\Omega_2^1)(0, 1, 2) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{D^2} \operatorname{tr}(\tilde{g}_1^{-1} d\tilde{g}_1 d\tilde{g}_2 \tilde{g}_2^{-1}) \\ &\quad + \int_{D^2} \left\{ H^{(2)}(\ln \tilde{g}_1) + H^{(2)}(\ln \tilde{g}_2) \right. \\ &\quad \left. - H^{(2)}(\ln \tilde{g}_1 \tilde{g}_2) \right\} \end{aligned} \quad (7.1.14)$$

函数 $\hat{\alpha}(g_1, g_2)$ 依赖于所选择的限制; 换句话说, α^2 依赖于所选的盘 D^2 。证明如下: 设 $\tilde{g}_{1+}, \tilde{g}_{2+}: D_+^2 \rightarrow G_1$, 和 $\tilde{g}_{1-}, \tilde{g}_{2-}: D_-^2 \rightarrow G_1$

分别为定义在北半球 D_+^2 和南半球 D_-^2 上的映射, 使得 $\tilde{g}_{1+}, \tilde{g}_{2+}: D_+^2 \rightarrow G_1$ 和 $\tilde{g}_{1-}, \tilde{g}_{2-}: D_-^2 \rightarrow G_1$, 当限制在 $S^1 = \partial D_+^2 = \partial D_-^2$ 上时, $(\tilde{g}_{1+}, \tilde{g}_{2+})$ 和 $(\tilde{g}_{1-}, \tilde{g}_{2-})$ 有相同的值。那么

$$\begin{aligned} \hat{a}(g_{1+}, g_{2+}) - \hat{a}(g_{1-}, g_{2-}) &= \int_{D_+^2} (\mathcal{A}\Omega_2^1)(0, 1, 2) - \int_{D_-^2} (\mathcal{A}\Omega_2^1)(0, 1, 2) \\ &= \frac{-1}{8\pi^2} \int_{S^2} \text{tr}(\tilde{g}_1^{-1} d\tilde{g}_1 d\tilde{g}_2 \tilde{g}_2^{-1}) \\ &\quad + \int_{S^2} \left\{ H^{(2)}(\ln \tilde{g}_1) + H^{(2)}(\ln \tilde{g}_2) \right. \\ &\quad \left. - H^{(2)}(\ln \tilde{g}_1 \tilde{g}_2) \right\} \\ &= \int_{S^2} (\mathcal{A}\Omega_2^1)(0, 1, 2) \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

我们想证明上式等于整数 Z 。为此目的, 我们把 S^4 分成三个盘 $D^4(i), i = 0, 1, 2$ 。 $D^4(i)$ 的边是 3-维球 $S^3(i), \partial D^4(i) = S^3(i)$ 。

然后我们把 $S^3(i)$ 分成盘 $D^3(i, j)$ 的和: $S^3(i) = \sum_{j \neq 0} D^3(i, j)$, 使

得 $D^3(i, j)$ 有共同的边 S^2 , $\partial D^3(i, j) = S^2(i, j) = (-1)^{i+j-1} S^2$ 。

那么利用递降方程可知 (7.1.15) 的最后一项为:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} (\mathcal{A}\Omega_2^1)(0, 1, 2) &= \sum_{i < j} \int_{S^2(i, j)} \Omega_2^1(i, j) \\ &= \sum_{i < j} \int_{D^3(i, j)} d\Omega_2^1(i, j) = \sum_{i < j} \int_{D^3(i, j)} (\mathcal{A}\Omega_3^0)(i, j) \\ &= \sum_{i \neq j} \int_{D^3(i, j)} \Omega_3^0(i) = \sum_{i=0}^2 \int_{S^3(i)} \Omega_3^0(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^2 \int_{D^4(i)} d\Omega_3^0(i) = \sum_{i=0}^2 \int_{D^4} \Omega_4^{-1}(F) \\
&= \int_{S^4} \Omega_4^{-1}(F) = Z
\end{aligned} \tag{7.1.16}$$

由此可见函数 $\hat{\alpha}$ 依赖于所选的限制。然而差别 Z 并不重要, 因为我们只对 $\exp(2\pi i \hat{\alpha})$ 感兴趣。

新的乘法规则 (7.1.2) 是可结合的, 当且仅当

$$\begin{aligned}
&\hat{\alpha}(g_2, g_3) + \hat{\alpha}(g_1, g_2 g_3) - \hat{\alpha}(g_1, g_2) \\
&\hat{\alpha}(g_1 g_2, g_3) = Z
\end{aligned} \tag{7.1.17}$$

然而上式正好是 2-上闭链条件。为了检验 (7.1.17) 式, 我们注意到, 对所选的限制, 由递降方程和 (7.1.14) 式我们能写,

$$\hat{\alpha}(g_1, g_2) = \int_{S^1} \Omega_1^2(0, 1, 2) \tag{7.1.18}$$

这样

$$\Delta \hat{\alpha}(g_1, g_2, g_3) = \int_{S^1} (\Delta \Omega_1^2)(0, 1, 2, 3) \tag{7.1.19}$$

重复上面讨论的分区方法, $S^4 = \sum_{i=0}^2 D^4(i)$, $\partial D^4(i) = S^3(i)$

$= \sum_{j \in \{i, 1\}} D^3(i, j)$, $\partial D^3(i, j) = S^2(i, j) = \sum_{k \in \{i, j\}} D^2(i, j, k)$, 使得 D^2

(i, j, k) 有公共的边: $\partial D^2(i, j, k) = S^1(i, j, k) = (-1)^{i+j+k-2} S^1$, $(i < j < k)$ 。我们有:

$$\begin{aligned}
(\Delta \hat{\alpha})(g_1, g_2, g_3) &= \int_{S^1} (\Delta \Omega_1^2)(0, 1, 2, 3) \\
&= \sum_{i < j < k} \int_{S^1(i, j, k)} \Omega_1^2(i, j, k) \\
&= \sum_{i < j < k} \int_{D^2(i, j, k)} d\Omega_1^2(i, j, k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i < j < k} \int_{D^2(i, j, k)} (\mathcal{A} \Omega_2^1)(i, j, k) \\
&= \sum_{i < j < k} \int_{D^2(i, j, k)} \Omega_2^1(i, j) = \sum_{i < j} \int_{S^2(i, j)} \Omega_2^1(i, j) \\
&= \sum_{i < j} \int_{D^3(i, j)} d\Omega_2^1(i, j) \\
&= \sum_{i < j} \int_{D^3(i, j)} (\mathcal{A} \Omega_3^0)(i, j) \\
&= \sum_{i < j} \int_{D^3(i, j)} \Omega_3^0(i) = \sum_{i=0}^3 \int_{S^3(i)} \Omega_3^0(i) \\
&= \sum_{i=0}^3 \int_{D^4(i)} d\Omega_3^0(i) = \sum_{i=0}^3 \int_{D^4(i)} \Omega_4^{-1}(F) \\
&= \int_{S^4} \Omega_4^{-1}(F) = \mathbf{Z} \tag{7.1.20}
\end{aligned}$$

这样我们看到2-上闭链条件 (7.1.17) 式成立。

上面定义的 $\hat{\alpha}$ 只是由 $Map(S^1, G_1)$ 通过 $U(1)$ 扩张后所得群的2-上闭链! $Map(S^1, G_1)$ 的集合并不是 Γ 的子群。而且我们不能把 $\hat{\alpha}$ 连续地扩充到整个群, 原因是从对数所出现的不连续性。因此为了覆盖整个群 Γ , 我们必须应用局域坐标系。选择两映射 $\tilde{g}_1: D^2 \rightarrow SU(2)/\{-a\} = G_a$, 和 $\tilde{g}_2: D^2 \rightarrow SU(2)/\{-b\} = G_b$, 使得 $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2: D^2 \rightarrow SU(2)/\{-c\} = G_c$, 那么他们在 $S^1 = \partial D^2$ 上的限制为 $g_1: S^1 \rightarrow G_a$, $g_2: S^1 \rightarrow G_b$ 和 $g_1 g_2: S^1 \rightarrow G_c$ 。明显地, 对每个 $a \in SU(2)$, 所有映射 $g: S^1 \rightarrow G_a$ 的集合在 $Map(S^1, SU(2))$ 上定义了一个坐标系 V_a , 所有这样的坐标系 V_a 的和给出了 $Map(S^1, SU(2))$ 的一个覆盖,

$$Map(S^1, SU(2)) = \bigcup_{a \in SU(2)} V_a. \tag{7.1.21}$$

这样我们能定义

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{ab}(g_1, g_2) = & -\frac{1}{8\pi^2} \int_{D^2} \text{tr} (\tilde{g}_1^{-1} d\tilde{g}_1 d\tilde{g}_2 \tilde{g}_2^{-1}) \\ & + \int_{D^2} \left\{ H^{(2)}(\ln a^{-1} \tilde{g}_1) + H^{(2)}(\ln b^{-1} \tilde{g}_2) \right. \\ & \left. - H^{(2)}(\ln c^{-1} \tilde{g}_1 \tilde{g}_2) \right\}\end{aligned}\quad (7.1.22)$$

模整数 $\mathbf{Z}$, 函数 $\hat{\alpha}_{ab}$ 不依赖于所选的限制; 证明与 $a=b=c=1$ 时的情况相同, 因对一常数 $a \in SU(2)$, $dH^{(2)}(\ln a^{-1}g) = c^{(3)}(a^{-1}g) = c^{(3)}(g)$, 且递降方程不变。对规范场 A , V_a 和 V_b 之间的转移函数定义为:

$$h_{ab}(g) = \int_{D^2} \left\{ H^{(2)}(\ln a^{-1} \tilde{g}_1) - H^{(2)}(\ln b^{-1} \tilde{g}_2) \right\} \quad (7.1.23)$$

这里 $g \in V_a \cap V_b$ 为 $\tilde{g}: D^2 \rightarrow G_a \cap G_b$ 在 $S^1 = \partial D^2$ 上的限制。因我们只对 $\exp(2\pi i h_{ab})$ 感兴趣, 故 $h_{ab}(g)$ 并不依赖于所选的限制。证明如下: 设 $\tilde{g}_\pm$ 为 $G_a \cap G_b$ 中的两个盘 D_+^2 和 D_-^2 , 使得它们在 $S^1 = \partial D_+^2 = \partial D_-^2$ 上的限制有相同的值。那么通过连接公共的边界, 我们能构造 $\tilde{g}: S^2 = D_+^2 \cup D_-^2 \rightarrow G_a \cap G_b$ 。因此在两个 h_{ab} 的表达式间的差为:

$$\begin{aligned}h_{ab}(g_+) - h_{ab}(g_-) &= \int_{D_+^2} \left\{ H^{(2)}(\ln a^{-1} \tilde{g}_+) \right. \\ &\quad \left. - H^{(2)}(\ln b^{-1} \tilde{g}_+) \right\} - \int_{D_-^2} \left\{ H^{(2)}(\ln a^{-1} \tilde{g}_-) \right. \\ &\quad \left. - H^{(2)}(\ln b^{-1} \tilde{g}_-) \right\} = \int_{S^2} \left\{ H^{(2)}(\ln a^{-1} \tilde{g}) \right. \\ &\quad \left. - H^{(2)}(\ln b^{-1} \tilde{g}) \right\} = \int_{S^3} \left\{ c^{(3)}(g_a) - c^{(3)}(g_b) \right\} \\ &= \int_{S^3} c^{(3)}(g_{ab}) = W[g_{ab}] = \mathbf{Z}\end{aligned}\quad (7.1.24)$$

这里我们已通过设 $S^3 = \partial D^4$ 连接 来得 $g_{ab}: S^3 \rightarrow G$, $W[g_{ab}]$ 表映射 g_{ab} 的环绕数。

从转移函数的定义, 可得

$$\hat{\alpha}_{a,b,c}(g_1, g_2) - \hat{\alpha}_{a,b,c}(g_1, g_2) = h_{a,b,c}(g_1) \quad (7.1.25)$$

相似地可以定义对指标 b 和 c 的关系式。

我们知道, 在反常的规范理论中, 进入递降方程中的反常并非是唯一确定的。特别在1-维空间中, 对易子反常可以取作或者为 c -数或者依赖于规范场 A 。前者即我们上面所考虑的 loop 代数的中心扩张, 而后者意味着 Kac-Moody 扩张是非中心的。在群的意义下, 这意味着我们可以构造两种类型的扩张: 中心扩张 $U(1) \rightarrow \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ 和非中心扩张, $\alpha(U(1)) \rightarrow \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, 这里 $\alpha(U(1))$ 是函数入: $\alpha \rightarrow U(1)$ 构成的群, α 为所有规范场构成的空间。下面我们来讨论第二种类型的扩张。

在1-维中, 反常规范理论的流代数中可有如下的反常:

$$[u, v](x) = [u(x), v(x)] + ic \int_{S^1} \text{tr}(uvA) \quad (7.1.26)$$

A 是 S^1 上 $\text{Lie } G$ -值的势1-形式。 $\text{Map}(S^1, \text{Lie } G)$ 的李代数扩张现在是无穷维的, 因此是非中心的。我们可以自然地把 (7.1.26) 式看作连络空间上通过 A 的规范轨道上的 Kac-Moody 代数; 不同的轨道对应于不同的 Kac-Moody 代数。为考虑与 (7.1.26) 式对应的群, 我们考虑扩张 $\alpha(U(1)) \rightarrow \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, 它使我们假定如下的乘法律:

$$(g_1, \lambda)(g_2, \mu) = (g_1 g_2, \lambda(A)\mu(A^{g_1})e^{2\pi i \alpha(A; g_1, g_2)}) \quad (7.1.27)$$

$\lambda, \mu \in \alpha(U(1))$ 。现在 α 是 g_1, g_2 以及 A 的实值函数。按上面相同的论证, 局域上我们能定义

$$\alpha(A; g_1, g_2) = \int_{D^2} (\mathcal{L}\Omega_2^1)(\tilde{A}, \tilde{A}^{g_1}, \tilde{A}^{g_1 g_2})$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{S^1} (\triangle X_1^1)(A, A^{g_1}, A^{g_1 g_2}) \\
& \equiv \hat{\alpha}(g_1, g_2) - \int_{S^1} (\triangle X_1^1)(A, A^{g_1}, A^{g_1 g_2})
\end{aligned}
\tag{7.1.28}$$

$$X_1^1(A, A^g) = \int_{\triangle^1} \chi_1^1 \tag{7.1.29}$$

$\triangle^1$ 为群空间中以 e 和 g 为顶点的 1-单形, χ_1^1 由“三角形”公式给出

$$\chi_1^1 = \frac{1}{24\pi^2} \operatorname{tr} \left\{ g^{-1} \delta g (g^{-1} A g + g^{-1} d g) \right\}
\tag{7.1.30}$$

δ 为对群元 g 可依赖的任何参数的微分。

模整数 Z , 函数 α 并不依赖于所选的扩展, 证明本质上与上面相同。注意到 α 与 $\hat{\alpha}$ 相差一个上边, 故 α 和 $\hat{\alpha}$ 上同调等价, 即它们定义 loop 群 Γ 的等价的扩张。由此可见在 $(l+1)$ -维反常规范理论中, 中心扩张和非中心扩张实际上是相容的和相互等价的。此结论只有在 $(l+1)$ -维理论中才是正确的。

由于 $\triangle$ 的零幂性, 函数 α 满足 2-上闭链条件

$$\begin{aligned}
& \alpha(A^{g_1}, g_2, g_3) + \alpha(A, g_1, g_2 g_3) - \alpha(A, g_1, g_2) \\
& - \alpha(A, g_1 g_2, g_3) = 0 \bmod n
\end{aligned}
\tag{7.1.31}$$

它也是新乘法律 (7.1.27) 式可结合所要求的表达式! 为了避免从对数出现的不连续性和覆盖整个群 Γ , 我们必须再次使用前面定义的局域坐标系 V_α 。选择两个盘 $\tilde{g}_1: D^2 \rightarrow G_*$ 和 $\tilde{g}_2: D^2 \rightarrow G_*$, 使得 $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2: D^2 \rightarrow G_*$, 那么我们得到它们在 $S^1 = \partial D^2$ 上的限制 $g_1 \in V_*$ 和 $g_2 \in V_*$ 。从 (7.1.28) 式我们得

$$\begin{aligned}
\alpha_{\alpha\alpha}(A; g_1, g_2) &= \hat{\alpha}_{\alpha\alpha}(g_1, g_2) - \int_{S^1} \left\{ X_1^1(A^{g_1}, \right. \\
& \left. A^{g_1 g_2}) - X_1^1(A, A^{g_1 g_2}) + X_1^1(A, A^{g_1}) \right\}
\end{aligned}
\tag{7.1.32}$$

对规范场 A , V_+ 和 V_- 之间的转移函数仍由 (7.1.23) 式给出。

7.2 四维反常规范理论中的 Kac-Moody 群

在 $(3+1)$ -维中, Schwinger-Jackiw-Johnson 项的最简单的形式也与规范势相关。人们不可能得到一个是非平庸的, 与规范势 A 无关的自洽的 Schwinger-Jackiw-Johnson 项。故 Kac-Moody 扩张往三空间维数 (或高维) 中的推广不可能是一个 c -数。取最简单的形式, 反常规范理论的流代数有如下反常:

$$[u, v](x) = [u(x), v(x)] + ic \int_{S^3} \text{tr}(du dv A) \quad (7.2.1)$$

$u, v \in \text{Map}(S^3, \text{Lie}G)$, A 为 S^3 上 $\text{Lie}G$ 一值的矢量势 1-形式, c 为常数。现在 $\text{Map}(S^3, \text{Lie}G)$ 的李代数扩张是无穷维的。让我们考虑单位元的连通分量 $\text{Map}_1(S^3, G)$ (即零孤粒子数区)。为简便计, 考虑 G 的第四阶同伦群为零的情况: $\pi_4(G) = 0$ (例如, $SU(n), n \geq 3$)。局域上, 与 (7.2.1) 式对应的群的 2-上闭链 $\alpha_2(A; g_1, g_2)$ 可如下定义: 起点是 6-维 (S^3) 中的 Chern-Pontryagin 密度,

$$\Omega_6^{-1}(F) = \frac{-i}{48\pi^3} \text{tr} F^3 \quad (7.2.2)$$

局域上 Ω_6^{-1} 是恰当的

$$\Omega_6^{-1}(F) = d\Omega_5^0(A) \equiv d\Omega_5^0(0) \quad (7.2.3)$$

其中

$$\Omega_5^0(0) = -\frac{i}{48\pi^3} \text{tr} \left(A (dA)^2 + \frac{3}{2} A^3 dA + \frac{3}{5} A^5 \right) \quad (7.2.4)$$

是5-维 (S^5) 中的Chern-Simons密度。 Ω_5^0 的上边缘为

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\Omega_5^0)(0,1) &\equiv \Omega_5^0(1) - \Omega_5^0(0) \\ &= \frac{-i}{48\pi^3} d\text{tr} \left\{ -dgg^{-1} (AdA + \frac{1}{2}A^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (dgg^{-1})^2 A^2 + \frac{1}{4} (dgg^{-1}A)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (dgg^{-1})^3 A \right\} - \frac{i}{432\pi^3} \text{tr} (dgg^{-1})^5 \quad (7.2.5) \end{aligned}$$

最后一项 $c^{(5)} = -\frac{i}{432\pi^3} \text{tr} (dgg^{-1})^5$ 局域上是恰当的, 即存在某

4-形式 $H^{(4)}$ 使 $c^{(5)} = dH^{(4)}$ 。由于我们只考虑 $Map_1(S^3, G)$, 故 $H^{(4)}$ 可表作为

$$H^{(4)}(\ln g) = \frac{-i}{480\pi^3} \int_0^1 \text{tr} (dg(x,t)g(x,t)^{-1})^5 \quad (7.2.6)$$

$$g(x,t) = \exp(tu(x))$$

从递降方程我们得在4-维中的非阿贝尔反常:

$$\begin{aligned} \Omega_4^1(0,1) &\equiv \Omega_4^1(\tilde{A}, \tilde{A}^s) \\ &= \frac{-i}{48\pi^3} \text{tr} \left\{ -d\tilde{g}\tilde{g}^{-1} (\tilde{A}d\tilde{A} + \frac{1}{2}\tilde{A}^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (d\tilde{g}\tilde{g}^{-1})^2 \tilde{A}^2 + \frac{1}{4} (d\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\tilde{A})^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (d\tilde{g}\tilde{g}^{-1})^3 \tilde{A} \right\} + H^{(4)}(\ln \tilde{g}) \\ &\equiv \Omega^{(4)}(\tilde{A}, \tilde{A}^s) + H^{(4)}(\ln \tilde{g}) \quad (7.2.7) \end{aligned}$$

我们已用 $\tilde{Q}$ 代替限制于4-维中的量 Q 。

设 D^4 为6-维时空中的某4-维盘, 那么任何映射 $\tilde{g}: D^4 \rightarrow G$

均能限制为映射 $g: \partial D^4 \rightarrow G$, ∂D^4 代表 D^4 的边。我们将考虑 $S^3 = \partial D^4$ 的情况。设 $\tilde{g}_1$ 和 $\tilde{g}_2$ 是 G 中的两个盘, 使得 $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2: D^4 \rightarrow G$, 那么我们有有限制映射 $g_1, g_2: S^3 \rightarrow G$ 。这样我们能定义:

$$\begin{aligned} \alpha_2(A; g_1, g_2) &= 2\pi \int_{D^4} (\mathcal{L}\Omega_4^{(1)})(0, 1, 2) \\ &= 2\pi \int_{D^4} \left\{ \Omega^{(4)}(\tilde{A}^{\tilde{g}_1}, A^{\tilde{g}_1 \tilde{g}_2}) \right. \\ &\quad - \Omega^{(4)}(\tilde{A}, \tilde{A}^{\tilde{g}_1 \tilde{g}_2}) + \Omega^{(4)}(\tilde{A}, \tilde{A}^{\tilde{g}_2}) \\ &\quad + H^{(4)}(\ln \tilde{g}_1) + H^{(4)}(\ln \tilde{g}_2) \\ &\quad \left. - H^{(4)}(\ln \tilde{g}_1 \tilde{g}_2) \right\} \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

用7.1节中类似的方法可以证明, 模整数 Z , 函数 $\alpha_2(A; g_1, g_2)$ 与所选择的盘 D^4 无关。 α_2 的2-上闭链条件也可类似地证明。这样我们能定义群 $\hat{\Gamma} = \Gamma \rtimes_{\alpha_2} \alpha(U(1))$, $\hat{\Gamma}$ 中的乘法定义如下:

$$(g_1, \lambda)(g_2, \mu) = (g_1 g_2, \lambda(A)\mu(A'^{-1}) e^{i\alpha_2(A; g_1, g_2)}) \quad (7.2.9)$$

$\hat{\Gamma}$ 中的乘法的可结合性等价于2-上闭链条件。

7.1与7.2两节中的方法可以推广用来构造共形理论中 Virasoro 群的2-上闭链。对它详细的讨论超出了本书的范围。

第 8 章

反常与联络空间上同调

8.1 Chern-Simons类型的上同调

我们考虑流形 M 上规范群为 G 的规范理论。设 $M^{2n-k+1} \subset M$ 为 M 的 $(2n-k+1)$ -维子流形, $A^0, \dots, A^k$ 是 M^{2n-k+1} 上的 $(k+1)$ 个联络 (规范势) 1-形式; $t^1, \dots, t^k$ 是 $\mathbf{R}^k(t)$ 上的 k 个参数, $0 \leq t^1, \dots, t^k \leq 1$ 。在 M^{2n-k+1} 上的内插联络形为

$$A_{0, t^1, \dots, t^k} = A^0 + \sum_{j=1}^k t^j \eta^{j,0} \quad (8.1.1a)$$

$$\eta^{j,i} = A^j - A^i \quad (8.1.1b)$$

设 Δ^k 为 $\mathbf{R}^k(t)$ 中的 k -单形,

$$\Delta^k = \left\{ (t^1, \dots, t^k) \mid \sum_{j=1}^k t^j = 1, t^j \geq 0, j = 1, \dots, k \right\} \quad (8.1.2)$$

那么在 M^{2n-k+1} 上的连络形 $A_{0,t^1\cdots t^k}$ 可以扩展到 $M^{2n-k+1} \times \mathcal{A}^k$ 上的连络形, $\mathcal{A}_{0,t^1\cdots t^k}, \mathcal{A}_{0,t^1\cdots t^k}$ 的 t -分量取为零。对应于 $\mathcal{A}$ 的曲率 (场强) 2-形式为,

$$\mathcal{F}_{0,t^1\cdots t^k} = (d + \delta) \mathcal{A}_{0,t^1\cdots t^k} + \mathcal{A}_{0,t^1\cdots t^k}^2 \quad (8.1.3)$$

其中 $\delta = dt^i \frac{\partial}{\partial t^i}$ 为 $\mathbf{R}^k(t)$ 上的外微分算子, $d = dx^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 为 M 上的外微分算子。若我们定义

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{0,t^1\cdots t^k})_2^0 &\equiv F_{0,t^1\cdots t^k} \\ &= dA_{0,t^1\cdots t^k} + A_{0,t^1\cdots t^k}^2 \\ (\mathcal{F}_{0,t^1\cdots t^k})_1^1 &= \delta A_{0,t^1\cdots t^k} = \sum_{j=1}^k dt^j \eta^{j,0} \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

()_j 表 $\mathbf{R}^k(t)$ 上的 i -形式, M 上的 j -形式。则我们有

$$\mathcal{F}_{0,t^1\cdots t^k} = F_{0,t^1\cdots t^k} + \delta A_{0,t^1\cdots t^k} \quad (8.1.5)$$

设 $P(\mathcal{F}^*)$ 是 $\mathcal{F}$ 的 n -秩不变多项式, 它是 $M^{2n-k+1} \times \mathbf{R}^k(t)$ 上的 $2n$ -形式, 那么我们可引入 k -阶 Chern-Simons 类型的示性多项式密度 q_{2n-k}^k ,

$$\begin{aligned} q_{2n-k}^k(A^0, \dots, A^k) \\ = \sum_{\substack{l_1, \dots, l_n=0 \\ l_1 + \dots + l_n = k}}^1 P((\mathcal{F}_{0,t^1\cdots t^k})_{2-l_1}^{l_1}, \dots, (\mathcal{F}_{0,t^1\cdots t^k})_{2-l_n}^{l_n}) \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

容易证明密度 q_{2n-k}^k 可表作为

$$\begin{aligned} q_{2n-k}^k(A^0, \dots, A^k) &= (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} \\ &\cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} P((\delta A_{0,t^1\cdots t^k})^k, F_{0,t^1\cdots t^k}^{n-k}) \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

k -阶Chern-Simons类型的示性类 Q^{k}_{2n-k} 定义为 q^{k}_{2n-k} 对 k -单形 Δ^k 的积分

$$Q^{k}_{2n-k}(A^0, \dots, A^k) = \int_{\Delta^k} q^{k}_{2n-k}(A^0, \dots, A^k) \quad (8.1.8)$$

且 q^{k}_{2n-k} 和 Q^{k}_{2n-k} 满足:

$$\begin{aligned} q^{k}_{2n-k}(A^0, \dots, A^k) &= \in_{i_0, \dots, i_k}^{0, \dots, k} q^{k}_{2n-k}(A^{i_0}, \dots, A^{i_k}) \\ Q^{k}_{2n-k}(A^0, \dots, A^k) &= \in_{i_0, \dots, i_k}^{0, \dots, k} Q^{k}_{2n-k}(A^{i_0}, \dots, A^{i_k}) \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

$(i_0, \dots, i_k)$ 是 $(0, \dots, k)$ 的某个置换。

q^{k}_{2n-k} 和 Q^{k}_{2n-k} 的最重要的性质由下面的两个定理给出:

定理 I Chern-Simons 类型的密度 q^{k}_{2n-k} 满足一个递降方程:

$$\delta q^{k-1}_{2n-k+1} = d q^{k}_{2n-k} \quad (8.1.10)$$

定理 II Chern-Simons类型的示性多项式 Q^{k}_{2n-k} 满足:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k Q^{k-1}_{2n-k+1}(A^{i_0}, \dots, \hat{A}^{i_j}, \dots, A^{i_k}) \\ = d Q^{k}_{2n-k}(A^0, \dots, A^k) \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

这里 $\hat{A}^{i_j}$ 表示删去 A^{i_j} 。

这两个定理的证明不难但很繁, 我们将不在这里给出, 读者可参阅郭汉英, 王世坤, 吴可在 Commun. in Theor. Phys. 上的原始文章。

现在我们来考查一些简单的例子。对 $k=0$, 我们只有联络1-形式 A^0 , 这样,

$$\left. \begin{aligned} Q^0_{2n}(A^0) &= q^0_{2n}(A^0) = P(F(A^0)^n) \\ dP(F(A^0)^n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1.12)$$

上式的最后一个方程代表了示性类 $P(F^*)$ 的一个重要的性质。

对 $k=1$, 我们有

$$\left. \begin{aligned} A_{0,t} &= A^0 + t^1 \eta^{1,0} \\ \eta^{1,0} &= A^1 - A^0 \\ Q^1_{2n-1}(A^0, A^1) &= n \int_0^1 dt^1 P(A^1 - A^0, F_{0,t}^{n-1}) \end{aligned} \right\}$$

(8.1.13)

定理 II 表明

$$P(F(A^1)^*) - P(F(A^0)^*) = dQ^1_{2n-1}(A^0, A^1) \quad (8.1.14)$$

(8.1.14) 式即为所谓的 transgression 公式。它把不变多项式 $P(F^*)$ 和 Chern-Simons 第二示性类 Q^1_{2n-1} 联系起来。

对 $k=2$,

$$\left. \begin{aligned} A_{0,t^2} &= A^0 + t^1 \eta^{1,0} + t^2 \eta^{2,0} \\ \eta^{1,0} &= A^1 - A^0 \quad \eta^{2,0} = A^2 - A^0 \\ Q^2_{2n-2}(A^0, A^1, A^2) &= n(n-1) \int_0^1 dt^1 \int_0^{1-t^1} dt^2 P(\eta^{1,0}, \eta^{2,0}, F_{0,t^1,t^2}^{n-2}) \end{aligned} \right\}$$

(8.1.15)

定理 II 意味着

$$\begin{aligned} Q^1_{2n-1}(A^1, A^2) - Q^1_{2n-1}(A^0, A^2) \\ + Q^1_{2n-1}(A^0, A^1) = dQ^2_{2n-2}(A^0, A^1, A^2) \end{aligned} \quad (8.1.16)$$

它即为“三角形”公式。 Q^2_{2n-2} 称为 Chern-Simons 第三示性类。

对 $k=3$,

$$\left. \begin{aligned}
A_{0, i^1 i^2 i^3} &= A^0 + t^1 \eta^{1,0} + t^2 \eta^{2,0} + t^3 \eta^{3,0} \\
\eta^{1,0} &= A^1 - A^0 \quad \eta^{2,0} = A^2 - A^0 \\
\eta^{3,0} &= A^3 - A^0 \\
Q_{2n-3}^3 (A^0, A^1, A^2, A^3) &= n(n-1)(n-2) \\
&\cdot \int_{A^3} dt^1 dt^2 dt^3 P(\eta^{1,0}, \eta^{2,0}, \eta^{3,0}, F_{0, i^1 i^2 i^3}^{n-3})
\end{aligned} \right\} \quad (8.1.17)$$

定理 II 意味着

$$\begin{aligned}
Q_{2n-2}^2 (A^1, A^2, A^3) &- Q_{2n-2}^2 (A^3, A^2, A^3) \\
&+ Q_{2n-2}^2 (A^0, A^1, A^3) - Q_{2n-2}^2 (A^0, A^1, A^2) \\
&= dQ_{2n-3}^3 (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (8.1.18)
\end{aligned}$$

一般说来, 在子流形 $M^{2n-k} \subset M$ ($k = 0, \dots, n$) 上的 Chern-Simons 类型的示性类 $Q_{2n-k}^k (A^0, \dots, A^k)$ 构成了示性类的一个等级, 它们从相同的示性类递降得到。

设 Q^k 是 $(k+1)$ 个按顺序排列的连络形 $(A^0, \dots, A^k)$ 的一组函数。我们以下述方式定义一个算子 $\overline{\mathcal{A}}$,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}}: Q^k &\rightarrow Q^{k+1} \\
(\overline{\mathcal{A}}Q^k) (A^0, \dots, A^{k+1}) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j Q^k (A^0, \dots, \hat{A}^j, \dots, A^{k+1})
\end{aligned} \quad (8.1.19)$$

容易验证 $\overline{\mathcal{A}}^2 = 0$, 且假定 $\overline{\mathcal{A}}$ 与 d 对易即 $\overline{\mathcal{A}}d - d\overline{\mathcal{A}} = 0$ 。这意味着若 Q^k -多项式是 k -上链, 那么 $\overline{\mathcal{A}}$ 是上边缘算子。满足 $\overline{\mathcal{A}}Q^k = 0$ 的上链称为 k -上闭链; 若 $Q^k = \overline{\mathcal{A}}Q^{k-1}$, 则 Q^k 称为上边

缘。根据上边缘算子 $\overline{d}$ ，我们可以把定理 II 写作为如下简单的形式：

$$(\overline{d}Q_{2n-k-1}^{k-1})(A^0, \dots, A^k) = dQ_{2n-k}^k(A^0, \dots, A^k) \quad (8.1.20)$$

我们可以如下引入 k -上链：

$$Q^k(A^0, \dots, A^k) = \int_{M^{2n-k}} Q_{2n-k}^k(A^0, \dots, A^k) \quad (8.1.21)$$

那么由 (8.1.20) 式，

$$\begin{aligned} & (\overline{d}Q^{k-1})(A^0, \dots, A^k) \\ &= \int_{\partial M^{2n-k+1}} Q_{2n-k+1}^{k-1}(A^0, \dots, A^{k-1}) \end{aligned} \quad (8.1.22)$$

若我们有非平庸的边条件， $\partial M^{2n-k+1} \neq 0$ ， Q^{k-1} 并不满足上闭链条件： $\overline{d}Q^{k-1} \neq 0$ 。若 $\partial M^{2n-k+1} = 0$ ，则 $\overline{d}Q^{k-1} = 0$ 成立， Q^{k-1} 是 $(k-1)$ -上闭链。这样 k -上链 Q^k 是 k -上闭链，当且仅当子流形 M^{2n-k} 无边， $\partial M^{2n-k} = 0$ ； k -上链 Q^k 是一个上边缘，当且仅当子流形 M^{2n-k} 是另一个子流形 M^{2n-k+1} 的边， $M^{2n-k} = \partial M^{2n-k+1}$ ； k -上闭链 Q^k 是非平庸的，当且仅当无边流形 M^{2n-k} 不能写作子流形 M^{2n-k+1} 的边。

Q_{2n-k}^k 是整体定义的，且在规范变换 $A^i \rightarrow (A^i)'$ 下是不变的，

$$Q_{2n-k}^k(A^0, \dots, A^k) = Q_{2n-k}^k((A^0)', \dots, (A^k)') \quad (8.1.23)$$

若我们取：

$$\left. \begin{aligned} A^0 &= A \\ A^1 &\equiv A^{g_1} \equiv g_1^{-1}(A+d)g_1 \\ A^k &\equiv A^{g_1 \cdots g_k} \equiv (g_1 \cdots g_k)^{-1}(A+d)(g_1 \cdots g_k) \end{aligned} \right\} \quad (8.1.24)$$

其中 g 为群 G 的元素, 则 $\alpha^k(A; g_1, \dots, g_k) \equiv Q^k(A^0, \dots, A^k)$ 满足:

$$\begin{aligned} (\overline{\Delta}\alpha^k)(A; g_1, \dots, g_{k+1}) &\equiv (\overline{\Delta}Q^k)(A^0, \dots, A^{k+1}) \\ &= \alpha^k(A^{k+1}; g_2, \dots, g_{k+1}) - \alpha^k(A; g_1 g_2, \\ &\quad \dots, g_{k+1}) + \dots + (-1)^i \alpha^k(A; g_1, \dots, \\ &\quad g_i g_{i+1}, \dots, g_{k+1}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{k+1} \alpha^k(A; g_1, \dots, g_k) \quad (8.1.25) \end{aligned}$$

这意味着我们能把 $\overline{\Delta}$ 等同为第5章中引进的规范群上边缘算子 Δ 。在此情况下, 所有的 A^k 均在相同的规范轨道上。

最后我们取 Chern-Simons Q^k_{CS} -上链作为一个例子来说明上面的公式对反常问题的应用。我们考虑 $G = SU(n)$ 的情况, 在此情况下, 0-阶 Chern-Simons Q -上链 $Q^0_{\text{CS}} = P(F^n)$ 对应于 S^0 上的第三 Chern 类。那么在 S^4 上左-右规范势 A_L 和 A_R 的规范不变的 Wess-Zumino-Witten 反常作用量为

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{WZW}}[h, A_L, A_R] &= 2\pi \int_{S^4} \left\{ Q^2_4(A^k_L, A_R, 0) \right. \\ &\quad \left. + Q^2_4(A_L, h^{-1}dh, 0) \right\} + 2\pi \int_{D^5} Q^1_5(h^{-1}dh, 0) \quad (8.1.26) \end{aligned}$$

8.2 连络空间上同调与族指数定理

考虑在紧致化欧空 M 上的连络形。我们假定主丛 $P(M, G)$ 有平庸拓扑, 即 $P = M \times G$ 。让 $\mathcal{U}$ 表连络空间, $\mathcal{U} = \{A(x)\}$, 让 $\mathcal{G}$ 为规范群, $\mathcal{G} = \{g(x) \mid g: M \rightarrow G\}$; 让 $\mathcal{U}/\mathcal{G}$ 表对应的轨道空间。因 $\mathcal{G}$ 是拓扑非平庸的, $\mathcal{U}/\mathcal{G}$ 也是拓扑非平庸的。用纤维丛的语言, 连络空间 $\mathcal{U}$ 可看作底为 $\mathcal{U}/\mathcal{G}$, 结构群为 $\mathcal{G}$ 的

纤维丛。我们把 $\mathcal{U}$ 局域上参数化为:

$$A = g^{-1} (a + d) g \quad (8.2.1)$$

$$a \in \mathcal{U}/\mathcal{G} \quad g \in \mathcal{G}$$

$\mathcal{U}$ 中的余切矢量为

$$\delta A = g^{-1} \delta a g - D_A (g^{-1} \delta g) \quad (8.2.2)$$

$$D_A = d + [A, \]$$

我们引入 $\mathcal{U}$ 上的联络形:

$$\mathcal{A} = -G_A D_A^+ \delta A \quad G_A = (D_A^+ D_A)^{-1} \quad (8.2.3)$$

使得:

$$\mathcal{A} \Big|_{\text{纤维}} = g^{-1} \xi g \quad (8.2.4)$$

ξ 为规范变分。 δA 能分解为水平分量和垂直分量, 分别用 $\delta_h A$ 和 $\delta_v A$ 表之,

$$\begin{aligned} \delta_h A &= (1 - D_A G_A D_A^+) \delta A \\ \delta_v A &= D_A G_A D_A^+ \delta A = -D_A \mathcal{A} \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

在 $M \times \mathcal{U}/\mathcal{G}$ 上的 $(g(x), g(\cdot), x, A)$ 点的总的联络形为

$$A + \mathcal{A} = A - G_A D_A^+ \delta A \quad (8.2.6)$$

对应的曲率形为:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (d + \delta)(A + \mathcal{A}) + (A + \mathcal{A})^2 \\ &= F + \delta_h A + \delta_v \mathcal{A} \\ &= (\mathcal{F})_0^2 + (\mathcal{F})_1^1 + (\mathcal{F})_2^0 \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

$$F = dA + A^2$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{F})_2^0 &= \delta_v \mathcal{A} & \delta_v \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 &= 0 \\ (\mathcal{F})_1^1 &= \delta_h A & \delta_h A &= -D_A \mathcal{A} \end{aligned} \right\} \quad (8.2.8)$$

$(\)_i^j$ 表 P 上的 j -形式, $\mathcal{U}$ 上的 i -形式。

丛和联络均能拉回到 $M \times \mathcal{U}/\mathcal{G}$ 上。根据族指数定理, 在

$\mathcal{U}/\mathcal{S}$ 上的示性类可表作 $M \times (\mathcal{U}/\mathcal{S})$ 上示性类对底 M 的积分:

$$Q^k(M) = \int_M P(\mathcal{F}^n) \quad (8.2.9)$$

$Q^k(M)$ 是 $\mathcal{U}/\mathcal{S}$ 上的 k -形式, $P(\mathcal{F}^n)$ 是 $\mathcal{F}$ 的 n -秩不变多项式, M 的维数为 $(2n-k)$ 。局域上, 我们能取水平规范 $D^+ A = 0$ 使得 $\mathcal{A} = 0$ 。我们可以方便地把 $\mathcal{U}/\mathcal{S}$ 定义为 $\mathcal{A} = 0$ 的空间。那么从(8.2.7)式我们可得在水平规范中的 $\mathcal{F}$, 并把它记为 $\hat{\mathcal{F}}$,

$$\hat{\mathcal{F}} = F + \delta_1 A = (d + \delta_1) A + A^2 \quad (8.2.10)$$

Bianchi等式 $D_1 \hat{\mathcal{F}} \equiv (d + \delta_1) \hat{\mathcal{F}} + [A, \hat{\mathcal{F}}] = 0$ 意味着

$$(d + \delta_1) P(\hat{\mathcal{F}}^n) = 0 \quad (8.2.11)$$

展开 $P(\hat{\mathcal{F}}^n)$,

$$P(\hat{\mathcal{F}}^n) = \sum_k q^{k, 2n-k}(F, \delta_1 A) \quad (8.2.12)$$

则从(8.2.11)式我们得如下的递降方程,

$$\begin{aligned} dq^{0, 2n} &= 0 & \delta_1 q^{0, 2n} &= 0 \\ \delta_1 q^{k, 2n-k+1} &= -dq^{k, 2n-k} \end{aligned} \quad (8.2.13)$$

引入对 $\mathcal{U}/\mathcal{S}$ 中任意非闭 k -链 $\hat{\mathcal{A}}^k$ 的积分:

$$\hat{Q}_{2n-k}(\hat{\mathcal{A}}^k) = \int_{\hat{\mathcal{A}}^k} q^{k, 2n-k}(F, \delta_1 A) \quad (8.2.14)$$

和对 M 中任意 $(2n-k)$ -链 C_{2n-k} 的积分:

$$\hat{Q}^k(C_{2n-k}) = \int_{C_{2n-k}} q^{k, 2n-k}(F, \delta_1 A) \quad (8.2.15)$$

则从(8.2.13)式和Stokes定理我们得如下的有限双上同调系列:

$$\left. \begin{aligned} d \hat{Q}_{2n-k-1} (\hat{Z}^{k+1}) &= - \hat{Q}_{2n-k} (\partial_k \hat{Z}^{k+1}) \\ \delta_k \hat{Q}^{k-1} (C_{2n-k+1}) &= - \hat{Q}^k (\partial C_{2n-k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (8.2.16)$$

∂_k 表 $\mathcal{W}/\mathcal{S}$ 中的求边运算。这样当选局域水平规范时，与族指数相联系的 Chern 类由 (8.2.15) 式给出，且满足递降方程 (8.2.16) 式。

从 (8.2.16) 式知当 $\partial M^{2n-k} = 0$ 时

$$\delta_k \hat{Q}^k (M_{2n-k}) = 0 \quad (8.2.17)$$

然而由于底 $\mathcal{W}/\mathcal{S}$ 的拓扑非平庸性， $\hat{Q}^k (M_{2n-k})$ 并不等于某个东西的 δ_k 。

Chern 类 $\hat{Q}^k (M_{2n-k})$ 为 $\mathcal{W}/\mathcal{S}$ 上的 k -形式；我们能把它提升到 $\mathcal{W}$ 上使之成为 $\mathcal{W}$ 上的 k -形式 $Q^k (M_{2n-k})$ 。为此目的，我们首先把 $q^k_{2n-k} (F, \delta_k A)$ 提升到 $\mathcal{W}$ 上来：

$$q^k_{2n-k} (\mathcal{F}^*) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = k \\ i_1 + \dots + i_n = 0}}^2 P((\mathcal{F})_{2-i_1}^{i_1}, \dots, (\mathcal{F})_{2-i_n}^{i_n}) \quad (8.2.18)$$

$P(\mathcal{F}^*)$ 的不变性， $(d + \delta) P(\mathcal{F}^*) = 0$ ，给出下面的递降方程：

$$\left. \begin{aligned} dq^k_{2n-k} (\mathcal{F}^*) &= 0, \quad \delta q^k_{2n-k} (\mathcal{F}^*) = 0 \\ \delta q^{k-1}_{2n-k+1} (\mathcal{F}^*) &= -dq^k_{2n-k} (\mathcal{F}^*) \end{aligned} \right\} \quad (8.2.19)$$

这样我们能构造 $\mathcal{W}$ 上的 k -形式

$$Q^k (C_{2n-k}) = \int_{C_{2n-k}} q^k_{2n-k} (\mathcal{F}^*) \quad (8.2.20)$$

和 M 上的 $(2n-k)$ -形式

$$Q_{2n-k}(\Delta^k) = \int_{\Delta^k} q^k_{2n-k}(\mathcal{F}^*) \quad (8.2.21)$$

这里 Δ^k 为 $\mathcal{W}$ 中的任意 k -链。从 (8.2.19) 式和 Stokes 定理, 我们容易得到:

$$\left. \begin{aligned} dQ_{2n-k-1}(\Delta^{k+1}) &= -Q_{2n-k}(\partial\Delta^{k+1}) \\ \delta Q^{k-1}(C_{2n-k+1}) &= -Q^k(\partial C_{2n-k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (8.2.22)$$

这些是空间 $\mathcal{W}$ 中的双上同调系。当 Δ^k 为单形且 δ 为连络空间上的内杆变更时, (8.2.22) 式的 Q 系列即代为 8.1 节中相应的 Q -系列。

根据族指数定理, 定义在 $\mathcal{W}$ 上的 $Q^k(C_{2n-k})$ 实际上定义了 $\mathcal{W}/\mathcal{E}$ 上的一个 k -形式。这能够验证如下: 若我们看没有积分的量 $q^k_{2n-k}(\mathcal{F}^*)$, 那么到某个全散度, 在 δA 中的项 $-D_*(g^{-1}\delta g)$ 并不对结果有贡献。

从 (8.2.22) 式我们看到当 $\partial M_{2n-k} = 0$ 时,

$$\delta Q^k(M_{2n-k}) = 0 \quad (8.2.23)$$

它表明 $Q^k(M_{2n-k})$ 是 $\mathcal{W}$ 上的上闭链。由于 $\mathcal{W}$ 拓扑平庸, 故 $Q^k(M_{2n-k})$ 也是恰当的, 即:

$$Q^k(M_{2n-k}) = \delta \Omega^{k-1}(M_{2n-k}) \quad (8.2.24)$$

这里的 $\Omega^k(M_{2n-k-1})$ 可如下求得: 因主丛拓扑平庸, 故从关系 $(d + \delta)P(\mathcal{F}^*) = 0$, 我们可得,

$$P(\mathcal{F}^*) = (d + \delta)\omega_{2n-1}(A + \mathcal{A}) \quad (8.2.25)$$

$\omega_{2n-1}(A + \mathcal{A})$ 由所谓的 transgression 公式给出:

$$\omega_{2n-1}(A + \mathcal{A}) = n \int_0^1 dt P(A + \mathcal{A}, \mathcal{F}_t^{n-1}) \quad (8.2.26)$$

$$\mathcal{F}_t = t\mathcal{F} + (t^2 - t)(A + \mathcal{A})^2$$

把 (8.2.25) 式对无边的 M_{2n-k} 积分然后与 (8.2.24) 式比较

我们得:

$$Q^k (M_{2n-k}) = \int_{M_{2n-k}} q^k{}_{2n-k} (F^*) \quad (8.2.27)$$

$$\Omega^{k-1} (M_{2n-k}) = \int_{M_{2n-k}} \omega^{k-1}{}_{2n-k} (A; \mathcal{A}) \quad (8.2.28)$$

$\omega^{k-1}{}_{2n-k} (A; \mathcal{A})$ 表 $\omega_{2n-1}(A + \mathcal{A})$ 的 $(2n-k, k-1)$ 分量。

当限制到纤维上时, (8.2.25) 式变为,

$$P(\check{F}^*) = P(F^*) = (d + \xi) \check{\omega}_{2n-1}(A + v) \quad (8.2.29)$$

其中,

$$\mathcal{A} \Big|_{\text{纤维}} \equiv \check{\mathcal{A}} = g^{-1} \xi g \equiv v \quad \mathcal{F} \Big|_{\text{纤维}} \equiv \check{\mathcal{F}} = F$$

$$\omega_{2n-1}(A + \mathcal{A}) \Big|_{\text{纤维}} \equiv \check{\omega}_{2n-1}(A + v)$$

把 $\check{\omega}_{2n-1}(A + v)$ 按 v 的幂次展开:

$$\check{\omega}_{2n-1}(A + v) = \sum_i \check{\omega}^i{}_{2n-1}(v; A) \quad (8.2.30)$$

则从 (8.2.29) 式我们得:

$$\left. \begin{aligned} d \check{\omega}^0{}_{2n-1}(v; A) &= q^0{}_{2n}(F^*) = P(F^*) \\ \xi \check{\omega}^0{}_{2n-1}(v; A) &= 0 \\ \xi \check{\omega}^{k-1}{}_{2n-k}(v; A) &= -d \check{\omega}^k{}_{2n-k-1}(v; A) \end{aligned} \right\} \quad (8.2.31)$$

它即是我们在第 4 章中给出的 ξ - d 双上调系。

引入积分:

$$\check{\Omega}^k(C_{2n-k-1}) = \int_{C_{2n-k-1}} \check{\omega}^k_{2n-k-1}(v; A) \quad (8.2.32)$$

$$\check{\Omega}^k_{2n-k-1}(\Gamma^k) = \int_{\Gamma^k} \check{\omega}^k_{2n-k-1}(v; A) \quad (8.2.33)$$

这里 Γ^k 为 $\mathcal{S}$ 中任意的 k -链。那么从 (8.2.31) 式和 Stokes 定理我们得:

$$\begin{aligned} d \check{\Omega}^k_{2n-k-1}(\Gamma^k) &= - \check{\Omega}^k_{2n-k}(\partial_v \Gamma^k) \\ \xi \check{\Omega}^{k-1}(C_{2n-k}) &= - \check{\Omega}^k(\partial C_{2n-k}) \end{aligned} \quad (8.2.34)$$

这里 ∂_v 表 $\mathcal{S}$ 中的边界运算。当 Γ^k 为单形时, 它即化为第 5 章中的 Δ - d 系列。

现在在水平和垂直上同调, 特别在这些上同调和族指数定理间的联系变得很明显了。引入积分

$$\alpha(\Gamma^k, C_{2n-k-1}) = \int_{\Gamma^k} \Omega^k(C_{2n-k-1}) \quad (8.2.35)$$

$$Q(\Delta^{k+1}, C_{2n-k-1}) = \int_{\Delta^{k+1}} Q^{k+1}(C_{2n-k-1}) \quad (8.2.36)$$

我们以这样的方法选择 $(k+1)$ -链 Δ^{k+1} , 使得它的边属于 $\mathcal{S}$, 即 $\partial \Delta^{k+1} = \Gamma^k \subset \mathcal{S}$, 且 Δ^{k+1} 投影到 $\mathcal{U}/\mathcal{S}$ 上时是 k -维球 $S^k \subset \mathcal{U}/\mathcal{S}$ 。注意到:

$$\Omega^k(M_{2n-k-1}) \Big|_{\text{纤维}} = \check{\Omega}^k(M_{2n-k-1}) \quad (8.2.37)$$

则利用 (8.2.24) 式我们能容易证明:

$$Q(\Delta^{k+1}, C_{2n-k-1}) = \alpha(\Gamma^k, C_{2n-k-1}) \quad (8.2.38)$$

特别,

$$\begin{aligned}\pi^{k+1}(\mathcal{Z}/\mathcal{G}) &= Q(\mathcal{A}^{k+1}, M_{2n-k-1}) \\ &= \alpha(\Gamma^k, M_{2n-k-1}) = \pi^k(\mathcal{G})\end{aligned}\quad (8.2.39)$$

这样我们把水平和垂直上同调与族指数定理联系起来了。

上面的分析是一般的和抽象的。为了进一步理解本节发展起来的体系，我们需要作一些具体的计算。这将在下一节中进行。

8.3 应 用

I. 泛函 $U(1)$ 联络形和 θ -真空

考虑 $(3+1)$ -维 Yang-Mills 理论，其拉氏量为

$$\mathcal{L}_{YM} = \int d^4x - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (8.3.1)$$

固定规范 $A_0 = 0$ ，考虑所有静态规范场 $A_i^a(x)$ 所构成的空间 $\mathcal{Z}^3$ 。在 Schrödinger 表象中波函数为 $\psi_0(A)$ 。高斯定律

$$D_i \left(\frac{\delta}{\delta A_i^a} \right) \psi_0(A) = 0 \quad (8.3.2)$$

可用来消除剩余的规范自由度。 $D_i \frac{\delta}{\delta A_i^a}$ 是规范变换的无穷小生成元。在同位平庸情况下，有限规范变换可从无穷小规范变换得到。因此，Gauss 定律意味着 $\psi_0(A)$ 在“小”的规范变换下是不变的（“小”的规范变换即是那些能从单位元经过无穷小变换得到的规范变换）。我们知道，存在有不能以上述方式得到的“大”规范变换，（在同伦非平庸的情况下）。这时波函数在“大”规范变换下不是不变的，

$$\psi_0(A^*) = e^{i\theta} \psi_0(A) \quad (8.3.3)$$

为了得到规范不变的波函数 $\psi(A)$ ，我们首先计算在 $\mathcal{U}^3/\mathcal{G}^3$ 上的1-形式，

$$\begin{aligned} \hat{Q}^1(S^3) &= \int_{S^3} q^1_3(F, \delta_A A) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3} (\text{tr}(F + \delta_A A)^2)_3 \\ &= \int_{S^3} -\frac{1}{4\pi^2} \text{tr}(F \delta_A A) \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

显然它是闭的： $\delta_A \hat{Q}^1(S^3) = 0$ ，但它是非恰当的。我们可以把 $\hat{Q}^1(S^3)$ 提升到 $\mathcal{U}^3$ 上，从而得 $\mathcal{G}^3$ 上的1-形式，

$$\begin{aligned} Q^1(S^3) &= \int_{S^3} q^1_3(\mathcal{F}^2) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}((\mathcal{F})_3 F) + \text{tr}(F(\mathcal{F})_3) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}(F(\mathcal{F})_3) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}(F \delta A) \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

我们可以把 $Q^1(S^3)$ 解释为 $\mathcal{U}^3$ 上的 $U(1)$ 联络形，对应的曲率形为，

$$\begin{aligned} \delta Q^1(S^3) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}(\delta F \delta A) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}(\delta A D_A(\delta A)) \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3} d(\text{tr}(\delta A \delta A)) = 0 \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

这样连络是“纯规范”。

因 $\mathcal{U}^3$ 有平庸的拓扑, 故 (8.3.6) 式意味着 $Q^1(S^3)$ 在 $\mathcal{U}^3$ 上是恰当的,

$$Q^1(S^3) = \delta\Omega^0(S^3) \quad (8.3.7)$$

这里,

$$\begin{aligned} \Omega^0(S^3) &= \int_{S^3} \omega_3^0(A + \mathcal{A}) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{S^3} \int_0^1 dt (\text{tr}((A + \mathcal{A}) \mathcal{F}_t))^3 \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} \left(AdA + \frac{2}{3} A^3 \right) \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

现考虑 $Q^1(S^3)$ 对 $\mathcal{U}^3$ 中的开路径 $\mathcal{A}^1$ 的积分。让 $\mathcal{A}^1$ 的边是相同规范轨道上的 A^g 和 A 两点。那么从 (8.3.7) 式我们有:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}^1} Q^1(S^3) &= \int_{\mathcal{A}^1} \delta\Omega^0(S^3) = \int_{\mathcal{A}^1} \Omega^0(S^3) \\ &= \int_{r^0} \Omega^0(S^3) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3} \left[\text{tr} (A^g dA^g \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} (A^g)^3) - \text{tr} \left(AdA + \frac{2}{3} A^3 \right) \right] \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} (g^{-1} dg)^3 = \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

这样若我们定义新的波函数 $\psi(A)$:

$$\psi(A) = e^{i\Omega^0(S^3)\theta} \psi_0(A) \quad (8.3.10)$$

则从 (8.3.3) 和 (8.3.9) 式可知 $\psi(A)$ 是规范不变的: $\psi(A^g) = \psi(A)$ 。然而在量子理论中, 波函数的一位相的改变对应一正则的变换。此正则变换会在拉氏量中诱导一个全散度项。这样导致了 Yang-Mills 拉氏量 (8.3.1) 中出现一直空 θ 角:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{YM} + \theta \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P} = \int \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F^a_{\mu\nu} F^a_{\sigma\rho} d^4x \quad (8.3.11)$$

关系式 (8.3.9) 是等式 $\pi^1(\mathcal{U}^3/\mathcal{G}^3) = \pi^0(\mathcal{G}^3) = \mathbb{Z}$ 的具体实现。此等式表明在 $\mathcal{U}^3/\mathcal{G}^3$ 中存在不可收缩的圈。这样在 $\mathcal{U}^3/\mathcal{G}^3$ 中有 Vortex 场。

II. 泛函 $U(1)$ 曲率形和 $\mathcal{U}$ 上反常的对易子

我们考虑定义了时空流形 S^3 上的非阿贝尔规范理论, 其拉氏量为:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mu \Omega^0(S^1) \quad (8.3.12)$$

此模型称为拓扑上有质量的规范理论。当量子化上面的非阿贝尔理论时, 我们面临着拉氏量 $\mathcal{L}$ 并非是规范不变的事实。若我们固定规范 $A_0 = 0$, 且考虑所有静态规范场 $A^a(x)$ 构成的空间 $\mathcal{U}^3$, 则波函数 $\psi(A)$ 在规范变换下并非不变的。而是有一相因子出现:

$$\psi(A') = e^{i\mu\alpha(\Sigma^1, S^2)} \psi(A) \quad (8.3.13)$$

这里我们已用了 Gauss 定律: $U(g)\psi(A) = \psi(A)$, 即 Gauss 定律要求物理态不受 U 作用的影响, 和关系式: $U(g)\psi(A) = \exp(-i\mu\alpha(\Sigma^1, S^2))\psi(A')$ 。上式中的 Σ^1 为 $\mathcal{G}^2$ 中非闭的 1-链。相应地我们有 $\alpha(\Gamma^1, S^2) = \pi^1(\mathcal{G}^2)$ (Γ^1 为 $\mathcal{G}^2$ 中的 1-维圈), 它描述其在纤维上的同伦性。由 8.2 节中的论述可见必然有在 $\mathcal{U}^2$ 上的 $Q^2(A^2, S^2) = \pi^2(\mathcal{U}^2/\mathcal{G}^2)$, 它等于上述的 $\alpha(\partial A^2 = \Gamma^1, S^2)$, A^2 为 $\mathcal{U}^2$ 中的 2-维盘。于是可以有 $\mathcal{U}^2/\mathcal{G}^2$ 上的 2-形式 $\hat{Q}^2(S^2)$, 事实上,

$$\begin{aligned} \hat{Q}^2(S^2) &= \int_{S^2} q^2(F, \delta_A A) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} (\text{tr}(F + \delta_A A)^2) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{8\pi^3} \int_{S^2} \text{tr} (\delta_\lambda A \delta_\lambda A) \quad (8.3.14)$$

提升 $\hat{Q}^2 (S^2)$, 我们得 $\mathcal{U}^2$ 上的 2-形式

$$\begin{aligned} Q^2(S^2) &= \int_{S^2} q^2_2 (\mathcal{F}^2) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} (\text{tr} (\mathcal{F}^2))^2 \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{S^2} \text{tr} ((\mathcal{F})^2 F) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \text{tr} ((\mathcal{F}) \wedge (\mathcal{F}) \wedge F) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \text{tr} (\delta A \delta A) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \delta \int_{S^2} \text{tr} (\mathcal{A} F) \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

显然它是闭的: $\delta Q^2 (S^2) = 0$ 。我们可以把 $Q^2 (S^2)$ 等同为 $\mathcal{U}^2$ 上的泛函 $U(1)$ 曲率 2-形式。由于 $\mathcal{U}^2$ 的拓扑平庸性, $Q^2(S^2)$ 也是恰当的:

$$Q^2 (S^2) = \delta \Omega^1 (S^2) \quad (8.3.16)$$

这里

$$\begin{aligned} \Omega^1 (S^2) &= \int_{S^2} \omega^1_2 (A + \mathcal{A}) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{S^2} \int_0^1 dt (\text{tr} ((A + \mathcal{A}) \mathcal{F}_t))^2 \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \text{tr} (A \delta A) - \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^2} \text{tr} (\mathcal{A} F) \end{aligned} \quad (8.3.17)$$

这样我们得到了 $\mathcal{U}^2$ 上的连络1-形式 $\Omega^1(S^2)$ 。

现在让我们来考查 $Q^2(S^2)$ 对 $\mathcal{A}^2$ 的积分。从 (8.3.16) 式我们有:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}^2} Q^2(S^2) &= \int_{\mathcal{A}^2} \delta \Omega^1(S^2) = \int_{\mathcal{A}^2} \Omega^1(S^2) \\ &= \int_{I^1} \Omega^1(S^2) = \int_{I^1} \check{\Omega}^1(S^2) \\ &= \int_{I^1} \int_{S^2} \check{\omega}_2^1 = \int_{I^1_+} \int_{S^2} \check{\omega}_2^1 - \int_{I^1_-} \int_{S^2} \check{\omega}_2^1 \\ &= \int_{I^0} \int_{D_+^3} \check{\omega}_3^0 - \int_{I^0} \int_{D_-^3} \check{\omega}_3^0 = \int_{I^0} \int_{S^3} \check{\omega}_3^0 = \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

我们看到与 $U(1)$ 连络形 $\Omega^1(S^2)$ 相关的 Chern 数为一整数 n 。(8.3.18) 式表明 $\pi^2(\mathcal{U}^2/\mathcal{G}^2) = \pi^1(\mathcal{G}^2) = \mathbf{Z}$, 它意味着在 $\mathcal{U}^2/\mathcal{G}^2$ 中存在不可收缩的2-维球。所以我们有在轨道空间 $\mathcal{U}^2/\mathcal{G}^2$ 中的磁单极。

上面的系统当在 Schrödinger 表象中量子化时, 是通常空间中量子电动力学在无穷维空间中的翻版。就象在有限的情况下一样, $\mathcal{U}^2$ 上场速度算子

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \delta_x + \mu \Omega^1(S^2) \\ \delta_x &= \int d^2x \delta A_i^0(x) \frac{\delta}{\delta A_i^0(x)} \end{aligned} \right\} \quad (8.3.19)$$

描述了一个在外 $U(1)$ 连络形 $\mu \Omega^1(S^2)$ 中的规范场。它的对易关系导致非零的曲率2-形式:

$$\begin{aligned} [V_x, V_r] &= \mu \delta \Omega^1(S^2) = \mu Q^2(S^2) \\ &= -\frac{\mu}{8\pi^2} \int_{S^2} \text{tr}(\delta A \delta A) \end{aligned}$$

$$-\frac{\mu}{4\pi^2} \delta \int_{S^2} \text{tr} (\mathcal{A} F) \quad (8.3.20)$$

上式明显满足 Jacobi 等式 $[V_x, [V_y, V_z]] + (\text{置换}) = \delta Q^3 \cdot (S^2) = 0$ 。这样在 $\mathcal{Z}^2$ 上的平移 (即场速度算子) 构成一李代数。

III. 设有势1-形式的泛函 $U(1)$ 规范理论和 $\mathcal{Z}$ 上的反常 Jacobi 等式。

我们现在考虑 $(3+1)$ -维非阿贝尔反常理论。假定非阿贝尔规范场最小耦合到某规范群复表示中的 Weyl 费米子。我们再一次取规范 $A_0 = 0$, 考虑所有静态场位形 $A_i(x)$ 构成的无穷维仿射空间 $\mathcal{Z}^3$ 。因我们正在处理反常的规范理论, 我们有 $\mathcal{Z}^3$ 上非零的 2-形式, 它对应于波函数在规范变换下不满足组合律, 而是有 2-上闭链 $\alpha(\Sigma^2, S^3)$ 出现。由 8.2 节中的分析, 为了描述反常的理论, 我们必须考虑 $\mathcal{Z}^3$ 上的 3-形式。为此我们首先计算 $\mathcal{Z}^3/\mathcal{G}^3$ 上的 3-形式:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^3(S^3) &= \int_{S^3} q^3(F, \delta_A A) \\ &= -\frac{i}{48\pi^3} \int_{S^3} \text{tr} (F + \delta_A A)^3 \\ &= -\frac{i}{48\pi^3} \int_{S^3} \text{tr} (\delta_A A \delta_A A \delta_A A) \end{aligned} \quad (8.3.21)$$

它是闭的, $\delta_A \hat{Q}^3(S^3) = 0$, 但不是恰当的。为与反常相联系, 我们提升 $\hat{Q}^3(S^3)$, 得到 $\mathcal{Z}^3$ 上的 3-形式,

$$\begin{aligned} Q^3(S^3) &= \int_{S^3} q^3(\mathcal{F}^3) = \frac{-i}{48\pi^3} \int_{S^3} (\text{tr} \mathcal{F}^2)^3 \\ &= \frac{-i}{48\pi^3} \int_{S^3} \text{tr} [(\mathcal{F})_1^3] \\ &\quad - \frac{i}{16\pi^3} \int_{S^3} \text{tr} [(\mathcal{F})_1^2 (\mathcal{F})_0^2 F] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{16\pi^2} \int_{S^3} \text{tr}[(\mathcal{F})_0^2 (\mathcal{F})_1^2 F] \\
& = -\frac{-i}{48\pi^2} \int_{S^3} \text{tr} (\delta A \delta A \delta A) \\
& \quad -\frac{i}{16\pi^3} \delta \int_{S^3} \text{tr} (F \delta A \mathcal{A} + F \mathcal{A} \delta A \\
& \quad + F \mathcal{A} D_A \mathcal{A})
\end{aligned} \tag{8.3.22}$$

它是闭的，也是恰当的：

$$Q^3(S^3) = \delta \Omega^2(S^3) \tag{8.3.23}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^2(S^3) &= \int_{S^1} \omega_3^2(A + \mathcal{A}) \\
&= -\frac{-i}{16\pi^3} \int_{S^3} \int_0^1 dt \text{tr}((A + \mathcal{A}) \mathcal{F}_t^2) \\
&= -\frac{-i}{48\pi^3} \int_{S^3} \text{tr} (A \delta A \delta A) \\
&= -\frac{i}{16\pi^3} \int_{S^3} \text{tr} (F \delta A \mathcal{A} + F \mathcal{A} \delta A + F \mathcal{A} D_A \mathcal{A}) \\
& \quad -\frac{i}{16\pi^3} \delta \int_{S^3} \text{tr}[\mathcal{A} (AF + FA - \frac{1}{2} A^3)]
\end{aligned} \tag{8.3.24}$$

我们可以把 $\Omega^2(S^3)$ 和 $Q^3(S^3)$ 分别等同于 $\mathcal{U}^3$ 上推广的泛函 $U(1)$ “势”2-形式和“场强”3-形式。那么上述体系当在Schrödinger表象中量子化时是量子力学点粒子在没有势1-形式的背景场中运动的无穷维翻版。这样我们必须处理泛函 $U(1)$ 反对称张量规范理论。这样的体系与在通常时空中没有势1-形式的量子电动力学有很多相似的性质：第一，在 $\mathcal{U}^3$ 上不存在光滑的 $U(1)$ 势1-形式；第二，作用在 $\mathcal{U}^3$ 上的

平移群的表示空间不是通常的泛函Hilbert空间,而是我们必须引入 $\mathscr{U}^3$ 上与膜相关的波函数。与膜相关的波函数是首先由侯伯宇,侯伯元和王珮在Ann. of Phys.上提出的。与有限维的情况相似, $\mathscr{U}^3$ 上的平移仍由“速度算子”(或称“电场算子”) E_x 生成,但 E_x 并不是光滑的泛函;

$$E_x = \int d^3x \delta A_i^a(x) E(A_i^a(x)) \quad (8.3.25)$$

E_x 的对易关系给出“连络”2-形式,

$$\begin{aligned} [E_x, E_y] = \Omega^2(S^3) &= -\frac{i}{48\pi^3} \int_{S^3} \text{tr}(A \delta A \delta A) \\ &- \frac{i}{16\pi^3} \int_{S^3} \text{tr}(F \delta A \mathscr{A} + F \mathscr{A} \delta A + F \mathscr{A} D_A \mathscr{A}) \\ &- \frac{i}{16\pi^3} \delta \int_{S^3} \text{tr}[\mathscr{A}(AF + FA - \frac{1}{2}A^3)] \end{aligned} \quad (8.3.26)$$

而 Jacobi 等式给出“曲率”3-形式,

$$\begin{aligned} [E_x, [E_y, E_z]] + (\text{循环置换}) &= \delta \Omega^2(S^3) \\ &= Q^3(S^3) = -\frac{i}{48\pi^3} \int_{S^3} \text{tr}(\delta A \delta A \delta A) \\ &- \frac{i}{48\pi^3} \int_{S^3} \text{tr}(F \delta A \mathscr{A} + F \mathscr{A} \delta A + F \mathscr{A} D_A \mathscr{A}) \end{aligned} \quad (8.3.27)$$

由于 Jacobi 等式已被破坏了,故协变平移(在 $\mathscr{U}^3$ 上的)并不可结合且不构成Lie代数。然而由于 $\delta Q^3(S^3) = 0$,电场平庸地满足我们在第5章中给出的四重约束等式:

$$\begin{aligned} [E_x, [E_y, [E_z, E_w]] + (\text{循环置换})] \\ + (\text{循环置换}) = \delta Q^3(S^3) = 0 \end{aligned} \quad (8.3.28)$$

我们现在把 $Q^3(S^3)$ 对 $\mathscr{U}^3$ 中的3-维盘 $\mathscr{A}^3$ 进行积分。选择 $\mathscr{A}^3$ 使

它的边 $\partial A^3 = F^2$ 是 $\mathscr{C}^3$ 中的 2-维球。那么从 (8.3.23) 式得:

$$\begin{aligned}
 \int_{A^3} Q^3(S^3) &= \int_{A^3} \delta \Omega^2(S^3) = \int_{\partial A^3} \Omega^2(S^3) \\
 &= \int_{F^2} \Omega^2(S^3) = \int_{F^2} \check{\Omega}^3_{\bullet}(S^3) = \int_{F^2} \int_{S^3} \check{\omega}^2_3 \\
 &= \int_{F^2_+} \int_{S^3} \check{\omega}^2_3 - \int_{F^2_-} \int_{S^3} \check{\omega}^2_3 = \int_{F^1} \int_{D^4_+} \check{\omega}^1_4 \\
 &\quad - \int_{F^1} \int_{D^4_-} \check{\omega}^1_4 = \int_{F^1} \int_{S^4} \check{\omega}^1_4 = \int_{F^1_+} \int_{S^4} \check{\omega}^1_4 \\
 &\quad - \int_{F^1_-} \int_{S^4} \check{\omega}^1_4 = \int_{F^0} \int_{D^5_+} \check{\omega}^0_5 - \int_{F^0} \int_{D^5_-} \check{\omega}^0_5 \\
 &= \int_{F^0} \int_{S^5} \check{\omega}^0_5 = \mathbf{Z}
 \end{aligned} \tag{8.3.29}$$

它是 $\pi^3(\mathscr{U}^3/\mathscr{C}^3) = \pi^2(\mathscr{U}^3) = \mathbf{Z}$ 的具体实现。这样我们证明了在 $\mathscr{U}^3/\mathscr{C}^3$ 中存在一个不可收缩的 3-维球。

第 9 章

反常的微扰论验证和代数推导

9.1 Bjorken-Johnson-Low (BJL) 极限方法

在前面的章节中，我们已根据上闭链给出了反常的一个统一的数学描述。特别人们猜测2-上闭链的无穷小形式是理论的 Hamiltonian 描述中规范群生成元的定时对易子反常。许多人均想用微扰论的方法来证明这个猜想：有用正则的点分离办法的，有用 B JL 极限方法的，等等。但到目前为止，只有B JL 极限方法是成功的。在本节中我们给出Jo用B JL极限方法得到的一些结果。对微扰论的细则感兴趣的读者可参阅Jackiw和Jo的文章。

首先考虑在外规范场中运动的手征费米子。我们暂时并不量子化规范场。规范群生成元 $G^a(x)$ 是两部分的和：Yang-Mills 部分 $G^a_0(x)$ ，

$$G^a_0(x) = D^{ac}_i(x) \frac{\delta}{\delta A^c_i(x)} = \partial^c_i \frac{\delta}{\delta A^c_i(x)}$$

$$+ f^{abc} A_i^b(x) \frac{\delta}{\delta A_i^c(x)} \equiv -\delta_i^c \quad (9.1.1)$$

$G_0^a(x)$ 满足

$$[G_0^a(x), G_0^b(y)] = i f^{abc} G_0^c(x) \delta^3(x-y) \quad (9.1.2)$$

和费米流的时间分量部分 $J_0^a(x)$ ，它作用在费米子自由度上。

因此 $G^a(x) = G_0^a(x) + J_0^a(x)$ 。流 $J_\mu^a(x)$ 定义为

$$J_\mu^a(x) = \delta S / \delta A_\mu^a(x)$$

$$S = \int d^4x i \bar{\psi} \left(\not{\partial} + \frac{1-\gamma_5}{2} \not{A} \right) \psi \quad (9.1.3)$$

朴素的结果:

$$J_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x) t^a \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma_\mu \psi(x) \quad (9.1.4)$$

此流有通常的反常散度:

$$\begin{aligned} (D_\mu J_\mu^a)^a = & -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} t^a \partial_\mu (A_\nu \partial_\sigma A_\rho \\ & + \frac{1}{2} A_\nu A_\sigma A_\rho) \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

为了求出 $[G^a(x), G^b(y)]$, 我们需要知道 $[J_0^a(x), J_0^b(y)]$ 和 $[G_0^a(x), J_0^b(y)] = -\delta^{ab} J_0^b(y)$ 。后面这个对易子反映了费米子荷密度的规范相关性。

我们首先来计算流-流对易子。BJL 极限方法提供了计算两个算子的定时对易子的一条特别方便的途径:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | [A(\vec{x}, t), B(\vec{y}, t)] | \beta \rangle &= \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 \\ &\cdot \int dt_1 e^{i q_0(t-t_1)} \cdot \langle \alpha | T A(\vec{x}, t_1) B(\vec{y}, t) | \beta \rangle \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

T 为通常的时序算子。流-流对易子中的反常项是外 c -数场 A_μ 的泛函,所以我们只要考虑真空-真空期待值就够了。我们假定外场 A_μ 的时间依赖性是这样的,它使得真空态是很好定义的。对拉氏量

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \left(\phi + \frac{1-\gamma_5}{2} A \right) \psi \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (9.1.7)$$

我们得有效作用量 iS_{eff} ,

$$\begin{aligned} iS_{eff} &= \ln \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(i \int d\mathcal{X} (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1))}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(i \int d\mathcal{X} \mathcal{L}_0)} \\ &= \text{tr} \ln \left(1 + \frac{1}{\phi} \frac{1-\gamma_5}{2} A \right) \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

在微扰论展开中, iS_{eff} 为

$$\begin{aligned} iS_{eff} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dk_1 \cdots dk_n \tilde{A}_{\mu_1}^{\mu_1}(-k_1) \cdots \\ &\quad \tilde{A}_{\mu_n}^{\mu_n}(-k_n) \delta(k_1 + k_2 + \cdots \\ &\quad + k_n) \Pi^{(n) \mu_1 \cdots \mu_n}_{\mu_1 \cdots \mu_n}(k_1, \cdots, k_n) \\ A_\mu^a(x) &= \int dk e^{-ikx} \tilde{A}_\mu^a(k) \end{aligned} \quad (9.1.9)$$

$\Pi^{(n) \mu_1 \cdots \mu_n}_{\mu_1 \cdots \mu_n}(k_1, \cdots, k_n)$ 为定义在动量空间中的 n 点函数。

定义海欧项 $\tau_{ab}^{\mu\nu}(x, y; n)$:

$$\begin{aligned} \tau_{ab}^{\mu\nu}(x, y; n) &= \tilde{T}^* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \\ &\quad - T_* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \end{aligned} \quad (9.1.10)$$

其中

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) &= T^* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \\ &+ \frac{\delta J_a^\mu(x)}{\delta A_b^\nu(y)} \end{aligned} \quad (9.1.11)$$

$T^* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y)$ 是 Lorentz 协变的时序乘积,

$$\begin{aligned} T_* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) &= \theta((x-y) \cdot n) J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \\ &+ \theta((y-x) \cdot n) J_b^\nu(y) J_a^\mu(x) \end{aligned} \quad (9.1.12)$$

当 $n^\mu = (1, 0)$ ($\equiv n_0^\mu$), T_* 乘积化为通常的时序乘积。注意到:

$$\frac{\delta^2 i S_{eff}}{\delta A_a^\mu(x) \delta A_b^\nu(y)} = \langle 0 | \widetilde{T}^* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) | 0 \rangle. \quad (9.1.13)$$

其中下标 c 意味着我们只考虑连通图。海欧项 $\tau_{ab}^{\mu\nu}(x, y; n)$, 能分成两个部分: 起协变作用的海欧项 $\sigma_{ab}^{\mu\nu}(x, y; n)$, 它本身并不是 Lorentz 协变的, 我们必须把它加到 T_* 乘积上以使关联函数是 Lorentz 协变的, 也可以有另一种协变的海欧项 $\widetilde{\sigma}_{ab}^{\mu\nu}(x, y; n)$, 它本身是 Lorentz 协变的。起协变作用的海欧项可以从 Schwinger 项求得 (这里 Schwinger 项指 δ 函数的导数前的系数函数), 协变的海欧项由 Ward 等式决定。通过强加一个条件, 即投影算子 $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$ 作用在起协变作用的海欧项上为零, 我们可以唯一地确定起协变作用的海欧项。从而协变的海欧项也唯一地确定了。

从 (9.1.11) 和 (9.1.13) 两式我们得

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{T}^* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \rangle_c &\equiv \frac{\delta^2 i S_{eff}}{\delta A_a^\mu(x) \delta A_b^\nu(y)} \\ &= \langle T^* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \rangle_c + \left\langle -\frac{\delta J_a^\mu(x)}{\delta A_b^\nu(y)} \right\rangle \end{aligned} \quad (9.1.14)$$

第二项 $\langle \delta J_a^\mu(x) / \delta A_b^\nu(y) \rangle$ 对 x 和 y 是局域的, 所以在动量空间中它是 q_0 的一个多项式; 在 BJL 计算中, 我们把它删去, 而代之以一个海欧项。 $\langle T^* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \rangle$ 和 $\langle T J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \rangle$, 相差一个局域的和 Lorentz 非协变的起协变作用的海欧项, 故

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}^* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \rangle_c &= \langle T J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \rangle_c \\ &+ \langle \tau_{ab}^{\mu\nu}(x, y; n_0) \rangle \end{aligned} \quad (9.1.15)$$

或更一般地我们有:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}^* J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \rangle &= \langle T J_a^\mu(x) J_b^\nu(y) \rangle \\ &+ \langle \tau_{ab}^{\mu\nu}(x, y; n) \rangle \end{aligned} \quad (9.1.16)$$

局域的海欧项 $\tau_{ab}^{\mu\nu}(x, y; n)$ 是 x 和 y 的函数, 且满足关系

$$\tau_{ab}^{\mu\nu}(x, y; n) = \tau_{ba}^{\nu\mu}(y, x; n) \quad (9.1.17)$$

即是说, 非连通的部分并不对 BJL 极限有贡献。这样我们得到如下的计算公式

$$\begin{aligned} \langle [J_a^\mu(x), J_b^\nu(y)] \rangle &= \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 \int dt_1 e^{iq_0(t_1 - t)} \\ &\cdot \left(\frac{\delta^2 i S_{eff}}{\sigma A_a^\mu(x) \delta A_b^\nu(y)} \right) \end{aligned} \quad (9.1.18)$$

当然在上式的右边忽略了一个任意的 q_0 的多项式。

在3-维空间中, 对反常的对易子有贡献的图有三角形图, 四角形图和五角形图。所有的高阶图均给出正规项。

可以证明 (证明过程留给读者作为练习):

$$\begin{aligned} [J_a^\mu(x), J_b^\nu(y)] &= i f^{abc} J_c^\mu(x) \delta^3(x - y) \\ &+ J_{ab}^{\mu\nu}(x, y) \end{aligned} \quad (9.1.19)$$

$$J_{ab}^{\mu\nu}(x, y) = \frac{i}{16\pi^2} \varepsilon^{ijkl} \text{tr}\{t^a, t^b\} F_{ij} \partial_k \delta^3(x - y)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{i}{24\pi^2} e^{ijk} \text{tr} (t^b t^a \partial_i A_j A_k \\
& - t^a t^b A_i \partial_j A_k - 2t^b t^a A_i \partial_j A_k + 2t^a t^b \partial_i A_j A_k \\
& + 3t^a \partial_i (A_j t^b A_k)) \delta^3 (x - y) \\
& + \frac{i}{16\pi^2} e^{ijk} \text{tr} ([t^b, t^a] A_i A_j A_k \\
& + 2t^a A_i t^b A_j A_k - 2t^b A_i t^a A_j A_k) \delta^3 (x - y)
\end{aligned} \tag{9.1.20}$$

$$\begin{aligned}
[J_0^a(x), J_0^b(y)] = & i f^{abc} J_0^c(x) \delta^3(x - y) \\
& + J_0^{a,b}(x, y)
\end{aligned} \tag{9.1.21}$$

$$\begin{aligned}
J_0^{a,b}(x, y) = & - \frac{i}{16\pi^2} e^{ijk} \text{tr} \{t^a, t^b\} (\partial_i A_0 \\
& - \partial_0 A_j) \partial_k \delta^3(x - y) \\
& - \frac{i}{48\pi^2} e^{ijk} \text{tr} (2t^b t^a \partial_j A_0 A_k + 2t^a t^b A_j \partial_k A_0 \\
& - 2t^b t^a \partial_j A_k A_0 + 2t^a t^b A_0 \partial_j A_k \\
& - 2t^b t^a \partial_0 A_j A_k - 2t^a t^b A_j \partial_0 A_k \\
& - 2t^b t^a A_0 \partial_j A_k + 2t^a t^b \partial_j A_k A_0 \\
& + t^b t^a A_j \partial_k A_0 + t^a t^b \partial_j A_0 A_k \\
& - t^b t^a A_j \partial_0 A_k - t^a t^b \partial_0 A_j A_k) \delta^3(x - y) \\
& - \frac{i}{16\pi^2} e^{ijk} \text{tr} (t^b t^a A_0 A_j - t^a t^b A_j A_0 \\
& - t^b t^a A_j A_0 + t^a t^b A_0 A_j) \partial_k \delta^3(x - y) \\
& - \frac{i}{32\pi^2} e^{ijk} \text{tr} (t^b A_j t^a \partial_0 A_k - t^a A_j t^b \partial_0 A_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t^a A_j t^b \partial_k A_0 - t^b A_j t^a \partial_k A_0 + t^b \partial_0 A_j t^a A_k \\
& - t^a \partial_0 A_j t^b A_k + t^a \partial_j A_0 t^b A_k \\
& - t^b \partial_j A_0 t^a A_k) \delta^3(x-y) \\
& + \frac{i}{16\pi^2} \epsilon^{ijk} \text{tr} (t^b t^a A_0 A_j A_k - t^a t^b A_j A_k A_0 \\
& - t^b A_j t^a A_0 A_k + t^a A_j t^b A_0 A_k \\
& + t^b A_j t^a A_k A_0 - t^a A_j t^b A_k A_0) \delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{9.1.22}$$

在费米理论中，由于从形式上的论证我们看到没有必要引入一个起协变作用的海欧项，故我们可以得到与在一个标量理论中成立的相同的关系式：

$$\frac{\delta J_\mu^\nu(y)}{\delta A_\mu^\alpha(x)} = \tilde{\sigma}_\alpha^{\nu\mu}(x, y) \tag{9.1.23}$$

然而在流-流对易子中非正则 Schwinger 项的出现表明了上述形式上的论证是不恰当的，我们有必要引入一个起协变作用的海欧项。现在我们来求此海欧项。从 (9.1.20) 和 (9.1.22) 式及对易子 $[J_\mu^a(x), J_\nu^b(y)] = 0$ ，我们能得流-流对易子：

$$\begin{aligned}
& [J_\mu^a(x), J_\nu^b(y)] \delta^3((x-y) \cdot n) \\
& = c_{\mu\nu}^{ab}(n) \delta^3(x-y) \\
& + S_{\mu\nu\rho}^{ab}(y; n) P^{\rho\sigma} \partial_\sigma \delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{9.1.24}$$

其中 Schwinger 项 $S_{\mu\nu\rho}^{ab}(y; n)$ 为：

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu\rho}^{ab}(y; n) & = \frac{-1}{16\pi^2} \text{tr}\{t^a, t^b\} (\partial^\alpha A^\beta \\
& + A^\alpha A^\beta) \cdot (\epsilon_{\rho\mu\nu\beta} n_\nu + \epsilon_{\rho\nu\alpha\beta} n_\alpha \\
& + g_{\mu\rho} \epsilon_{\delta\nu\alpha\beta} n^\delta + g_{\nu\rho} \epsilon_{\delta\mu\alpha\beta} n^\delta)
\end{aligned} \tag{9.1.25}$$

因起协变作用的海欧项 $\sigma_{\mu\nu}^{ab}(x, y; n) = \sigma_{\mu\nu}^{ab}(y; n) \delta^3(x - y)$ 满足

$$-\frac{\partial}{\partial n_\alpha} \sigma_{\mu\nu}^{ab}(y; n) = S_{\mu\nu\alpha}^{ab}(y; n) \quad (9.1.26)$$

我们得

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{\mu\nu}^{ab}(y; n) \rangle &= -\frac{1}{16\pi^2} \text{tr}\{t^a, t^b\} \\ &\quad \cdot (\partial^\alpha A^\beta + A^\alpha A^\beta) (n_\mu n^\nu \varepsilon_{\alpha\nu\alpha\beta} \\ &\quad + n^\nu n_\nu \varepsilon_{\sigma\mu\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (9.1.27)$$

这里给出的表达式由下式唯一确定:

$$P_{\mu\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(y; n) = P_{\nu\alpha} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(y; n) = 0$$

$\sigma_{\mu\nu}^{ab}(y; n)$ 就是起协变作用的海欧项。由于它明显地依赖于 n_μ , 故它是 Lorentz 非协变的。

为求协变的海欧项, 我们利用 Ward 等式

$$\begin{aligned} (D_\mu J^\mu(x))^\alpha &= \mathcal{U}^\alpha(x) \\ D_\mu^{\alpha\epsilon}(x) &\left(-\frac{\delta^2 S_{eff}}{\delta A_\mu^\epsilon(x) \delta A_\nu^b(y)} \right) \\ &= D_\mu^{\alpha\epsilon}(x) \frac{\delta}{\delta A_\nu^b(y)} \langle J_\epsilon^\mu(x) \rangle \\ &= \frac{\delta \mathcal{U}^\alpha(x)}{\delta A_\alpha^b(y)} + f^{abc} \delta(x-y) \langle J_\epsilon^\mu(y) \rangle \end{aligned} \quad (9.1.28)$$

另一方面

$$\begin{aligned} D_\mu^{\alpha\epsilon}(x) &\left(-\frac{\delta^2 i S_{eff}}{\delta A_\mu^\epsilon(x) \delta A_\nu^b(y)} \right) \\ &= D_\mu^{\alpha\epsilon}(x) \langle T_\alpha J_\epsilon^\mu(x) J_b^\nu(y) \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_{\mu}^{a^{\circ}}(x) \langle \sigma_{ab}^{\mu\nu}(x, y, n) \rangle \\
& = \langle T_{\mu} (D_{\mu} J_{(x)})_a J_b^{\nu}(y) \rangle_0 \\
& + \langle [n_{\mu} J_a^{\mu}(x), J_b^{\nu}(y)] \delta((x-y)n) \rangle + \\
& + D_{\mu}^{a^{\circ}}(x) \langle \tau_{ab}^{\mu\nu}(x, y, n) \rangle \quad (9.1.29)
\end{aligned}$$

$(D_{\mu} J_{(x)})^a = \mathcal{Z}^a(x)$ 是 c -数函数 (因 A_{μ} 是外场), 所以 $\langle T_{\mu} (D_{\mu} J^{\mu}(x))_a J_b^{\nu}(y) \rangle_0$ 为零。这样我们得

$$\begin{aligned}
\langle D_{\mu}^{a^{\circ}}(x) \tilde{\sigma}_{ab}^{\mu\nu}(x, y) \rangle & = i \frac{\delta \mathcal{Z}^a(x)}{\delta A_b^{\nu}(y)} \\
& - J_{ab}^{\mu\nu}(x, y, n) \\
& - \langle D_{\mu}^{a^{\circ}}(x) (\sigma_{ab}^{\mu\nu}(y, n) \delta(x-y)) \rangle_0. \quad (9.1.30)
\end{aligned}$$

上式左边与 n 无关, 故可令 $n = (1, 0)$, 我们得

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\sigma}_{ab}^{\mu\nu}(x, y) \rangle & = \frac{1}{48\pi^2} e_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}\{t^a, t^b\} \\
& \cdot (A^{\alpha}(x) + A^{\beta}(y)) \\
& \cdot \partial^{\rho} \delta^3(x-y) - \frac{1}{16\pi^2} e_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} t^a A^{\alpha} t^b A^{\beta} \\
& \cdot \delta^3(x-y) \quad (9.1.31)
\end{aligned}$$

注意到 $\langle \tilde{\sigma}_{ab}^{\mu\nu}(x, y) \rangle = \langle \tilde{\sigma}_{ba}^{\mu\nu}(y, x) \rangle_0$ 。

若我们令

$$\left\langle \frac{\delta J_b^{\nu}(y)}{\delta A_{\mu}^a(x)} \right\rangle_0 = \langle \tilde{\sigma}_{ab}^{\mu\nu}(x, y) \rangle \quad (9.1.32)$$

则我们有

$$\begin{aligned}
[G^a(x), G^b(y)] & = i f^{abc} G^c(x) \delta^3(x-y) \\
& + W^{ab}(x, y) \quad (9.1.33)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 W^{ab}(x, y) = & -\frac{i}{12\pi^2} e^{ijk} \text{tr}\{t^a, t^b\} \partial_i A_j \partial_k \delta^3(x-y) \\
 & - \frac{i}{48\pi^2} e^{ijk} \partial_i (\text{tr} t^a A_j t^b A_k) \delta^3(x-y) \\
 & + \frac{i}{48\pi^2} e^{ijk} \text{tr}\{t^a, t^b\} (A_i(x) A_j(y) \\
 & - A_j(y) A_i(x)) \partial_k \delta^3(x-y) \\
 & - \frac{i}{24\pi^2} e^{ijk} \text{tr}[t^a, t^b] (\partial_i A_j A_k \\
 & + A_i \partial_j A_k) \delta^3(x-y) \\
 & - \frac{i}{16\pi^2} e^{ijk} \text{tr}[t^a, t^b] A_i A_j A_k \delta^3(x-y)
 \end{aligned}
 \tag{9.1.34}$$

这些非正则的项是平庸的，因为若我们重新定义流：

$$\tilde{J}_\mu^a(x) = J_\mu^a(x) + \Delta J_\mu^a(x) \tag{9.1.35a}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta J_\mu^a(x) = & -\frac{i}{24\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} t^a \{A^\nu, \partial^\alpha A^\beta\} \\
 & + \frac{i}{16\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} t^a A^\nu A^\alpha A^\beta
 \end{aligned}
 \tag{9.1.35b}$$

那么 (9.1.33) 式变成

$$[\tilde{G}^a(x), \tilde{G}^b(y)] = i f^{abc} \tilde{G}^c(x) \delta^3(x-y) \tag{9.1.36a}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}^a(x) &= G_0^a(x) + \tilde{J}_0^a(x) \\
 &= G^a(x) + \Delta J_0^a(x)
 \end{aligned}
 \tag{9.1.36b}$$

然而流的这个重新定义使得反常的散度变成规范协变的表达式

$$(D_\mu \tilde{J}^\mu(x))^\alpha = -\frac{i}{32\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \text{tr} t^\alpha F_{\beta\gamma} F_{\delta\alpha} \quad (9.1.37)$$

对易子的平庸性与 Faddeev 的猜测相矛盾! Faddeev 猜测在非阿贝尔反常理论中非正则项是非平庸的, 它有如下形式:

$$W^{\alpha\beta}(x, y) = \frac{i}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \text{tr}\{t^\alpha, t^\beta\} \partial_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\sigma \cdot \delta^3(x-y) \quad (9.1.38)$$

故我们得出结论: 由于反常的出现, 我们不能把 $\delta J^\alpha(y)/\delta A^\alpha_\mu(x)$ 与海欧项等同起来。

在前面的处理中我们把规范场看作为外场, 把 $E^\alpha_\mu(x)$ 表作为 $\delta/\delta A^\alpha_\mu(x)$, 我们看到正则的假定并不能得到有非平庸 2-上闭链的对易子反常。因此我们必须把规范场也量子化, 此时我们并不能把 $E^\alpha_\mu(x)$ 表作为 $\delta/\delta A^\alpha_\mu(x)$:

$$\begin{aligned} [G^\alpha(x), G^\beta(y)] &= [(D_\mu E^\alpha_\mu(x))^\alpha + J^\alpha_0(x), (D_\mu E^\beta_\mu(y))^\beta + J^\beta_0(y)] \\ &= [(D_\mu E^\alpha_\mu(x))^\alpha, (D_\mu E^\beta_\mu(y))^\beta] \\ &\quad + D^\alpha_{i0}(x) [E^\alpha_i(x), J^\beta_0(y)] \\ &\quad + [J^\alpha_0(x), J^\beta_0(y)] \\ &\quad + D^\beta_{j0}(y) [J^\alpha_0(x), E^\beta_j(y)] \\ &= D^\alpha_{i0}(x) D^\beta_{j0}(y) [E^\alpha_i(x), E^\beta_j(y)] \\ &\quad + i f^{\alpha\beta\gamma} (D_\mu E^\gamma_\mu)^\gamma \delta^3(x-y) \\ &\quad + i f^{\alpha\beta\gamma} J^\gamma_0(x) \delta^3(x-y) + J^{\alpha\beta}_0(x, y) \\ &\quad + D^\alpha_{i0}(x) [E^\alpha_i(x), J^\beta_0(y)] \\ &\quad + D^\beta_{j0}(y) [J^\alpha_0(x), E^\beta_j(y)] \\ &= i f^{\alpha\beta\gamma} G^\gamma_\mu(x) \delta^3(x-y) + W^{\alpha\beta}(x, y) \end{aligned} \quad (9.1.39a)$$

$$W^{\alpha\beta}(x, y) = J^{\alpha\beta}_0(x, y)$$

$$\begin{aligned}
& + D_i^{a*}(x) D_j^{b*}(y) [E_i^a(x), E_j^b(y)] \\
& + D_i^{a*}(x) [E_i^a(x), J_0^b(y)] \\
& - D_j^{b*}(y) [E_j^b(y), J_0^a(x)] \quad (9.1.39b)
\end{aligned}$$

上式中的 E - E 对易子可从费米流-流时序积的海欧项中 P_0 的线性项部分来计算:

$$\begin{aligned}
& [E_i^a(x), E_j^b(y)] \\
& = \lim_{P_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{P_0} \int d^4t e^{iP_0 t} \tau_{ab}^{ij}(x, y) \quad (9.1.40)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tau_{ab}^{ij}(x, y) &= \sigma_{ab}^{ij}(x, y) + \tilde{\sigma}_{ab}^{ij}(x, y) \\
&= \frac{-1}{16\pi^2} \text{tr}\{t^a, t^b\} (\partial_a A_\beta \\
&\quad + A_a A_\beta) (g^{\mu 0} \varepsilon^{0 \nu \alpha \beta} - g^{\nu 0} \varepsilon^{0 \mu \alpha \beta}) \\
&\quad \cdot \delta^3(x-y) + \frac{1}{48\pi^2} \varepsilon^{\mu \nu \alpha \beta} \text{tr}\{t^a, t^b\} \\
&\quad \cdot (A_a(x) + A_a(y)) \partial_\beta \delta^3(x-y) \\
&\quad - \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu \nu \alpha \beta} \cdot \text{tr} t^a A_a t^b A_\beta \delta^3(x-y)
\end{aligned} \quad (9.1.41)$$

取适当的分量代入 (9.1.40) 式我们求得

$$\begin{aligned}
& [E_i^a(x), E_j^b(y)] \\
&= \frac{-1}{24\pi^2} \varepsilon^{ijk} \text{tr}\{t^a, t^b\} A_k \delta^3(x-y)
\end{aligned} \quad (9.1.42)$$

我们也能从海欧项的 $(i=0)$ 分量来算出 E - J 对易子

$$\begin{aligned}
& [E_1^a(x), J_0^b(y)] \\
&= - \lim_{p_0 \rightarrow \infty} \int dt e^{ip_0 t} \tau_{1/2}^a(x, y) \\
&= \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{ijk} \text{tr}\{t^a, t^b\} A_j(y) \partial_k \delta^3(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{12\pi^2} \varepsilon^{ijk} \text{tr}\{t^a, t^b\} \partial_j A_k \delta^3(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{ijk} [\text{tr}(t^a, t^b) A_j A_k \\
&\quad + \text{tr} t^a A_j t^b A_k] \delta^3(x-y) \quad (9.1.43)
\end{aligned}$$

代入 (9.1.39b) 我们求得

$$\begin{aligned}
W^{ab}(x, y) &= \frac{i}{48\pi^2} \varepsilon^{ijk} \text{tr} t^a \partial_i (A_j t^b A_k) \\
&\quad \delta^3(x-y) + \frac{i}{48\pi^2} \varepsilon^{ijk} \text{tr}(t^a, t^b) (\partial_i A_j A_k \\
&\quad + A_i \partial_j A_k) \delta^3(x-y) \\
&\quad + \frac{i}{48\pi^2} \varepsilon^{ijk} \text{tr}(t^a, t^b) A_i A_j A_k \delta^3(x-y) \quad (9.1.44)
\end{aligned}$$

重新定义流

$$\bar{J}_\mu^a = J_\mu^a + \Delta \bar{J}_\mu^a \quad (9.1.45a)$$

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{J}_\mu^a &= \frac{-i}{48\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} t^a (\partial^\nu A^\alpha A^\beta \\
&\quad + A^\nu \partial^\alpha A^\beta + A^\nu A^\alpha A^\beta) \quad (9.1.45b)
\end{aligned}$$

那么 (9.1.44) 式即化为 (9.1.38) 式。由此可见, 当我们考虑一个完整的反常理论, 其中费米子和规范场均被量子化时,

那么 Faddeev 的猜测能从 BJL 极限方法来证明。

我们看到3-维 E_a^i 对易子关系 (9.1.42) 式并不满足Jacobi 等式。定义 Jacobian $J(A, B, C) \equiv [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$, 我们发现:

$$\begin{aligned} J(E_a^i(x), E_b^j(y), E_c^k(z)) \\ = -\frac{i}{8\pi^2} \varepsilon^{ijk} \text{tr}\{t^a, t^b\} t^c \delta^3(x-y) \delta^3(x-z) \end{aligned} \quad (9.1.46)$$

这意味着 E_a^i 不能表作为线性算子。因为在 $E-A$ 对易子中没有反常, 故我们有如下代数结构:

$$\begin{aligned} [A_a^i(x), A_b^j(y)] &= 0 \\ [E_a^i(x), A_b^j(y)] &= i\delta^{ij}\delta_{ab}\delta^3(x-y) \\ [E_a^i(x), E_b^j(y)] \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{ijk} \text{tr}\{t^a, t^b\} A_c^k \delta^3(x-y) \end{aligned} \quad (9.1.47)$$

这个代数并不是李代数。然而此代数满足我们在5.2节中推的四重约束等式。

9.2 反常的代数推导

在本节中, 我们在 Hamiltonian 体系中给出 SJJ项和反常的Jacobian的非常一般的推导。我们只假定正则运动方程和正则对易关系; 我们允许源流有一反常的散度, 即我们把反常(流散度)看作是已知的。

在 Weyl 规范中, 和源相互作用的规范场的正则运动方

程为:

$$\begin{aligned}\partial_0 E_i^j(x) &= J_i^j(x) + (D_k F^{kj}(x))_i \\ E_i^j(x) &= -\partial_0 A_i^j(x)\end{aligned}\quad (9.2.1)$$

Gauss 定律约束为: $G^a(x) = J_0^a(x) + (D_i E^i)^a$ 。利用 (9.2.1) 式我们容易证明

$$\begin{aligned}\partial_0 G^a(x) &= \partial_0 J_0^a(x) + \partial_0 (\partial_i E^{ia} + f^{abc} A_i^b E^{ic}) \\ &= (D_\mu J^\mu)^a + (D_i D_j F^{ij})^a\end{aligned}\quad (9.2.2)$$

利用 Jacobi 等式,

$$f^{abc} f^{cde} + f^{bdc} f^{cae} + f^{dac} f^{ceb} = 0 \quad (9.2.3)$$

和 f^{abc} 的全反对称性我们能证明 $(D_i D_j F^{ij})^a = 0$ 。因此从 (9.2.2) 式我们有

$$\partial_0 G^a(x) = (D_\mu J^\mu)^a \quad (9.2.4)$$

引入量

$$\begin{aligned}G(u) &= \int_{R^3} d^3x u^a(x) G^a(x) \\ \mathcal{U}(E, A; u) &= \int_{R^3} d^3x u^a(x) \mathcal{U}^a(x)\end{aligned}\quad (9.2.5)$$

其中 $\mathcal{U}^a(x) = (D_\mu J^\mu)^a$ 是 Weyl 规范中的反常, 则 (9.2.4) 式化为:

$$\partial_0 G(u) = \mathcal{U}(E, A; u) \quad (9.2.6)$$

一般说来 $\mathcal{U}$ 对变量 u 是线性的, 它也是 E 和 A 以及 E 和 A 的导数的一个多项式函数。

在 (9.2.6) 中反常项的出现意味着约束 $G(u)$ 不是一个守恒量。当我们在某个初始时刻对物理态强 Gauss 定律约束条件时, 这个条件在后面的时刻并不被满足。因此, 我们不能以习惯的方式来自洽地量子化反常的规范理论。

现在我们来计算 SJJ 项。假定

$$[G(u), G(v)] = G([u, v])$$

$$+W(A; u, v) \quad (9.2.7)$$

W 为 SJJ 项; 它对变量 u 和 v 是反对称和双线性的, 且它是 A 和 A 的导数的多项式泛函。从(9.2.7)式我们可得下面的一个自洽性条件

$$\begin{aligned} \partial_0 W(A; u, v) &= [G(u), \mathcal{W}(E, A; v)] \\ &\quad - [G(v), \mathcal{W}(E, A; u)] \\ &\quad - \mathcal{W}(E, A; [u, v]) \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

上式中前两项的对易子可如下计算

$$\begin{aligned} &[G(u), \mathcal{W}(E, A; v)] \\ &\equiv [G(u), E] \frac{\partial}{\partial E} \mathcal{W}(E, A; v) \\ &\quad + [G(u), A] \frac{\partial}{\partial A} \mathcal{W}(E, A; v) \\ &\equiv \left. \frac{d}{dt} \mathcal{W}(E + t[G(u), E], A; v) \right|_{t=0} \\ &\quad + \left. \frac{d}{dt} \mathcal{W}(E, A + t[G(u), A]; v) \right|_{t=0} \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

利用正则对易子和运动方程及(9.2.6)式, 我们可证:

$$\begin{aligned} [G(u), A] &= Du \\ [G(u), E] &= [G(u), -\partial_0 A] \\ &= -\partial_0 [G(u), A] + [\partial_0 G(u), A] \\ &= -\partial_0 (Du) + [\mathcal{W}(E, A; u), A] \\ &= [E, u] + [\mathcal{W}(E, A; u), A] \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

代入(9.2.9)式得

$$\begin{aligned} &[G(u), \mathcal{W}(E, A; v)] \\ &= \left. \frac{d}{dt} \mathcal{W}(E + t[E, u], A; v) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d}{dt} \mathcal{V}(E \\
& + t[\mathcal{V}(E, A, u), A], A, v) \Big|_{t=0} \\
& + \frac{d}{dt} \mathcal{V}(E, A + tDu, v) \Big|_{t=0}
\end{aligned}
\tag{9.2.11}$$

用相同的方式可得

$$\begin{aligned}
& [G(v), \mathcal{V}(E, A, u)] \\
& = - \frac{d}{dt} \mathcal{V}(E + t[E, v], A, u) \Big|_{t=0} \\
& + \frac{d}{dt} \mathcal{V}(E + t[\mathcal{V}(E, A, v), A], A, u) \Big|_{t=0} \\
& + \frac{d}{dt} \mathcal{V}(E, A + tDv, u) \Big|_{t=0}
\end{aligned}
\tag{9.2.12}$$

取 $\mathcal{V}$ 为 Weyl 规范中的自洽反常,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{V}(E, A, u) \\
& = \frac{i}{24\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \text{tr} \left\{ E (dAu + u dA \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} A^2 u + \frac{1}{2} AuA + \frac{1}{2} uA^2) \right\}
\end{aligned}
\tag{9.2.13}$$

我们能证明

$$\begin{aligned}
& - \frac{d}{dt} \mathcal{V}(E + t[\mathcal{V}(E, A, u), A], A, v) \Big|_{t=0} \\
& = - \frac{d}{dt} \mathcal{V}(E
\end{aligned}$$

$$+t [\mathcal{Z}(E, A, v), A], A, u) \Big|_{t=0}$$

结果, (9.2.8) 式右边看起来象自洽反常的 BRS 变换; 非正则的项相互抵消, 只有正则的项剩下来。经过冗长但直接的运算我们可得

$$W(A; u, v) = -\frac{i}{48\pi^2} \int_{R^3} \text{tr} \{ [u, v] (dAA + AdA + A^3) + uAdvA - vAduA \} \quad (9.2.14)$$

它即为上节中用 BJL 方法得到的 SJJ 项的表达式。

为了计算反常的 Jacobian, 我们假定如下的三重对易子,

$$[G(u), [G(v), G(w)]] + \text{循环置换} = Z(A; u, v, w) \quad (9.2.15)$$

Z 即为反常的 Jacobian。上式两边对 t 进的微分我们得如下的自洽性条件

$$\begin{aligned} \partial_0 Z(A; u, v, w) = & [\mathcal{Z}(E, A; u), \\ & W(A; v, w)] - [G([u, w]), \mathcal{Z}(E, A; u)] \\ & + [G(u), [G(v), \mathcal{Z}(E, A; w)]] \\ & - [G(u), [G(w), \mathcal{Z}(E, A; v)]] \\ & + [\mathcal{Z}(E, A; v), W(A; w, u)] \\ & - [G([w, u]), \mathcal{Z}(E, A; v)] \\ & + [G(v), [G(w), \mathcal{Z}(E, A; u)]] \\ & - [G(v), [G(u), \mathcal{Z}(E, A; w)]] \\ & + [\mathcal{Z}(E, A; w), W(A; u, v)] \\ & - [G([u, v]), \mathcal{Z}(E, A; w)] \\ & + [G(w), [G(u), \mathcal{Z}(E, A; v)]] \\ & - [G(w), [G(v), \mathcal{Z}(E, A; u)]] \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

(9.2.16) 式可以利用 (9.2.8) 式加以简化, 最后结果为:

$$\begin{aligned} Z(A; u, v, w) = & [G(u), W(A; v, w)] \\ & + [G(v), W(A; w, u)] \\ & + [G(w), W(A; u, v)] \\ & + W(A; u, [v, w]) \\ & + W(A; v, [w, u]) + W(A; w, [u, v]) \end{aligned} \quad (9.2.17)$$

直接的计算给出

$$\begin{aligned} Z(A; u, v, w) = & \frac{i}{48\pi^2} \int_{\partial R^3} \text{tr} \{ A (du[v, w] \\ & + [v, w] du + dv[w, u] + [w, u] dv \\ & + dw[u, v] + [u, v] dw) \} \end{aligned} \quad (9.2.18)$$

若我们假定非平庸的边条件, 则 $\partial R^3 \neq 0$, (9.2.18) 式的右边非零, 从而 Jacobi 等式是反常的。(9.2.18) 式与 6.3 节中相应的反常 Jacobian 仅相差一些平庸的项。

9.3 递降方程的代数意义

在4-维的情况下, 我们有如下的递降方程

$$\begin{aligned} \dots \\ \delta \omega_4^1 = d\omega_3^2 \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

$$\delta \omega_3^2 = d\omega_2^3 \equiv \omega_3^3 \quad (9.3.2)$$

...

在本节中, 我们来考查 (9.3.1) 和 (9.3.2) 两式的代数意义。

正则运动方程为,

$$\begin{aligned}
\partial_0 E_i^a(x) &= -\frac{1}{i} [E_i^a(x), H] \\
&= J_i^a(x) + (D^{\mu} F_{\mu i}(x))^a \\
E_i^a(x) &= -\partial_0 A_i^a(x) = -\frac{1}{i} [A_i^a(x), H]
\end{aligned}
\tag{9.3.3}$$

其中 H 是理论的 Hamiltonian。我们考虑如下的 Jacobi 等式

$$\begin{aligned}
0 &= [G(u), [G(v), H]] + [G(v), [H, G(u)]] \\
&\quad + [H, [G(u), G(v)]] \\
&= i[G(u), \mathcal{U}(E, A; v)] \\
&\quad - i[G(v), \mathcal{U}(E, A; u)] \\
&\quad + [H, [G(u), G(v)]]
\end{aligned}
\tag{9.3.4}$$

利用对易子 $[G(u), G(v)] = G([u, v]) + W(A; u, v)$, 我们得,

$$\begin{aligned}
\partial_0 W(A; u, v) &= [G(u), \mathcal{U}(E, A; v)] \\
&\quad - [G(v), \mathcal{U}(E, A; u)] \\
&\quad - \mathcal{U}(E, A; [u, v])
\end{aligned}
\tag{9.3.5}$$

在上节中我们证明了上式右边是自洽反常的 BRS 变换

$$\begin{aligned}
(\delta \mathcal{U})(E, A; u, v) &\equiv [G(u), \mathcal{U}(E, A; v)] \\
&\quad - [G(v), \mathcal{U}(E, A; u)] \\
&\quad - \mathcal{U}(E, A; [u, v])
\end{aligned}
\tag{9.3.6}$$

这样 (9.3.5) 式变成

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt} \omega_3^2(A; u, v) \\
&\equiv -\frac{d}{dt} W(A; u, v) \\
&= \partial_0 W(A; u, v) = (\delta \mathcal{U})(E, A; u, v) \\
&\equiv (\delta \omega_3^2)(E, A; u, v)
\end{aligned}
\tag{9.3.7}$$

它与 (9.3.1) 式一致。由此可见递降方程 (9.3.1) 即是 Jacobi 等式 (9.3.4)。

为得到 (9.3.2) 式的意义, 我们考虑 4-重约束等式:

$$\begin{aligned}
 & [G(u), [G(v), [G(w), H]] + \text{循环置换}] \\
 & + \text{循环置换} = [G([u, v]), [G(w), H]] \\
 & + \text{循环置换} - [G([v, w]), [H, G(u)]] \\
 & + \text{循环置换} + [G([u, w]), [H, G(v)]] \\
 & + \text{循环置换} \quad (9.3.8)
 \end{aligned}$$

假定

$$\begin{aligned}
 & [G(u), [G(v), G(w)]] + \text{循环置换} \\
 & = Z(A; u, v, w) \quad (9.3.9)
 \end{aligned}$$

(9.3.8) 式变为

$$\begin{aligned}
 Z(A; u, v, w) &= [G(u), W(A; v, w)] \\
 &+ [G(v), W(A; w, u)] \\
 &+ [G(w), W(A; u, v)] \\
 &+ W(A; u, [v, w]) + W(A; v, [w, u]) \\
 &+ W(A; w, [u, v]) \quad (9.3.10)
 \end{aligned}$$

上式右边正好是对易子反常 $W(A; u, v)$ 的 BRS 变换。因此从 (9.3.10) 式我们有

$$\begin{aligned}
 \omega_3^s(A; u, v, w) &\equiv Z(A; u, v, w) \\
 &= (\delta W)(A; u, v, w) \equiv (\delta \omega_3^s)(A; u, v, w) \quad (9.3.11)
 \end{aligned}$$

它与 (9.3.2) 式一致。因此我们得出结论, 递降方程 (9.3.2) 即是 4-重约束等式 (9.3.8)。

第10章

协变反常

10.1 协变反常的路径积分推导

考虑已延拓到Euclidean 空间中费米子部分拉氏量

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi} i \not{D} \psi \quad (10.1.1)$$

$$\not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + V_\mu + A_\mu \gamma_5)$$

就象在2.2节中指出的, 在Euclidean空间中, 算子 $\not{D}$ 并非是厄米的。在2.2节的计算中, 我们对 A_μ 作了光滑的解析延拓 $A_\mu \rightarrow iA_\mu$ 。在本节中我们考虑另一种方法。此方法是应用在(10.1.1)式中出现的算子 $\not{D}$ 的极分解。定义两个厄米算子

$$\begin{aligned} H_+ &= \not{D}^\dagger \not{D} \\ H_- &= \not{D} \not{D}^\dagger \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

以及对应的正交本征函数集 $\{\varphi_n(x)\}$ 和 $\{\phi_n(x)\}$:

$$\begin{aligned} H_+ \varphi_n(x) &= \lambda_n^2 \varphi_n(x) \\ \langle \varphi_n(x) | \varphi_m(x) \rangle &= \delta_{nm} \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

$$H_{\bar{\psi}}\phi_n(x) = \lambda_n^2 \phi_n(x) \quad \langle \phi_n(x) | \phi_m(x) \rangle = \delta_{n,m} \quad (10.1.4)$$

我们然后展开 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n a_n \phi_n(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_n \bar{b}_n \phi_n(x)^+ \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

这样对应于手征变换 (2.2.6) 的 Jacobian 因子为

$$\begin{aligned} &(-i) \sum_n \{ \varphi_n(x)^+ \gamma_5 t^a \varphi_n(x) + \phi_n^+(x) \gamma_5 t^a \phi_n(x) \} \\ &\equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \{ \varphi_n(x)^+ \gamma_5 t^a e^{-\phi^+ \phi + \phi \not{Z} M^2} \varphi_n(x) \\ &\quad + \phi_n(x)^+ \gamma_5 t^a e^{-\phi^+ \phi + \phi \not{Z} M^2} \phi_n(x) \} \\ &= (-i) \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-i k x} \gamma_5 t^a (e^{-\phi^+ \phi + \phi \not{Z} M^2} + e^{-\phi^+ \phi + \phi \not{Z} M^2}) e^{i k x} \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

我们写

$$\begin{aligned} \phi &= \gamma^\mu (\partial_\mu + L_\mu) L + \gamma^\mu (\partial_\mu + R_\mu) R \\ L_\mu &= V_\mu - A_\mu \quad R_\mu = V_\mu + A_\mu \\ L &= (1 - \gamma_5)/2 \quad R = (1 + \gamma_5)/2 \end{aligned} \quad (10.1.7)$$

则我们能证明

$$\begin{aligned} \phi^+ \phi &= \phi_L^2 L + \phi_R^2 R \\ \phi \phi^+ &= \phi_L^2 R + \phi_R^2 L \end{aligned} \quad (10.1.8)$$

且,

$$\begin{aligned} &e^{-\phi^+ \phi + \phi \not{Z} M^2} \pm e^{-\phi^+ \phi + \phi \not{Z} M^2} \\ &= (L \pm R) e^{-\phi_L^2 \not{Z} M^2} + (R \pm L) e^{-\phi_R^2 \not{Z} M^2} \end{aligned} \quad (10.1.9)$$

这样 (10.1.6) 式的计算约化为通常的手征 $U(1)$ 反常的计算, 结果为

$$(-i) \frac{1}{32\pi^2} \text{tr } t^a \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (F_{\mu\nu}(R) F_{\alpha\beta}(R) + F_{\mu\nu}(L) F_{\alpha\beta}(L)) \quad (10.1.10)$$

特别若我们令 $R_\mu = 0$, $L_\mu = W_\mu$, 则我们得协变反常

$$i \frac{1}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr } t^a F_{\mu\nu}(w) F_{\alpha\beta}(w) \quad (10.1.11)$$

我们也注意到 $2n$ -维中的协变反常可由 $(2n+2)$ -维中的 $U(1)_A$ 反常以如下方式求得: 把 $(2n+2)$ -维中的 $U(1)_A$ 反常中的 F 作代换:

$$F \rightarrow F + \theta(x) \quad (10.1.12)$$

选出代换后的表达式中正比于 $\theta(x) = \theta^a(x) t^a$ 的项即 $\theta(x)$ 的线性项, 则我们得 $2n$ -维中的协变反常。即

$$\begin{aligned} \frac{i^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} \text{tr} (F + \theta)^{n+1} \longrightarrow \\ \frac{i}{2\pi} \frac{i^n}{(2\pi)^n} \frac{1}{n!} \text{tr } \theta F^n \end{aligned} \quad (10.1.13)$$

它就是 $2n$ -维中的协变反常。

10.2 与协变反常对应的协变流

我们已经知道, 自洽反常是由连通真空泛函的规范相关性决定的。真空泛函 $W[A]$ 可以看作规范场的非局域函数。在无穷小的规范变换下

$$\begin{aligned} T_\theta A_\mu^a &= (D_\mu \theta)^a = (\partial_\mu \theta + [A_\mu, \theta])^a \\ T_\theta F_{\mu\nu}^a &= ([F_{\mu\nu}, \theta])^a \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

θ^a 是无穷小的规范参数。真空泛函的规范相关性定义了自洽反常:

$$\begin{aligned}
T_\theta W[A] &= \int d\mathbf{x} \frac{\delta W}{\delta A_\mu^a} T_\theta A_\mu^a = \int d\mathbf{x} J_\mu^a(\mathbf{x}) (D_\mu \theta)^a \\
&= - \int d\mathbf{x} (D_\mu J^\mu(\mathbf{x}))^a \theta^a(\mathbf{x}) \\
&= - \int d\mathbf{x} \vartheta^a(\mathbf{x}) \alpha^a(A)
\end{aligned} \tag{10.2.2}$$

$\alpha^a(A)$ 是自洽反常, 流 J_μ^a 定义为真空泛函的泛函导数。考虑两个对真空泛函的规范变换的对易子:

$$(T_\theta T_{\theta'} - T_{\theta'} T_\theta) W[A] = T_{[\theta, \theta']} W[A] \tag{10.2.3}$$

我们可以得自洽性条件:

$$\int d\mathbf{x} (\theta'^a T_\theta \alpha^a - \theta^a T_{\theta'} \alpha^a) = \int d\mathbf{x} [\theta, \theta']^a \alpha^a \tag{10.2.4}$$

自洽反常必须满足自洽性条件 (10.2.4)。

自洽反常也决定了非阿贝尔流 J_μ^a 的基本的规范相关性。人们朴素地认为这个流在规范变换下是协变的。然而反常会影响流的变换性质。我们先考虑规范变分 T_θ 与定义流的 Noether 变分 δ_B 的对易子:

$$(\delta_B T_\theta - T_\theta \delta_B) W[A] \tag{10.2.5}$$

δ_B 如下定义:

$$\begin{aligned}
\delta_B A_\mu^a &= B_\mu^a, \\
\delta_B W[A] &= \int d\mathbf{x} \frac{\delta W}{\delta A_\mu^a} \delta_B A_\mu^a = \int d\mathbf{x} J_\mu^a(\mathbf{x}) B_\mu^a(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{10.2.6}$$

上述的对易子也可直接计算

$$\delta_B T_\theta - T_\theta \delta_B = \delta_{[\mathbf{B}, \theta]} \tag{10.2.7}$$

把此关系应用到真空泛函上我们得

$$\begin{aligned}
&(\delta_B T_\theta - T_\theta \delta_B) W[A] \\
&= \int d\mathbf{x} \{ (\delta_B \alpha^a) \theta^a - (T_\theta J_\mu^a) B_\mu^a \} \\
&= \int d\mathbf{x} J_\mu^a(\mathbf{x}) ([B_\mu, \theta])^a
\end{aligned} \tag{10.2.8}$$

上式立即给出了非阿贝尔流的规范变换性质

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{x} (T_\theta J_\mu^\alpha) B_\mu^\alpha &= - \int d\mathbf{x} ([B_\mu, \theta])^\alpha J_\mu^\alpha \\ &\quad + \int d\mathbf{x} (\delta_\theta \mathbf{a}^\alpha) \theta^\alpha \\ &= - \int d\mathbf{x} ([\theta, J^\mu])_\alpha B_\mu^\alpha + \int d\mathbf{x} (\delta_\theta \mathbf{a}^\alpha) \theta^\alpha\end{aligned}\quad (10.2.9)$$

上式右边第一项给出了流的通常的变换性质，第二项的出现是由于反常引起的。只有当反常为零时，流才是协变的。

现在我们来证明协变非阿贝尔流 $\tilde{J}_\mu^\alpha$ 的存在性，我们首先考虑4-维的情况。为了构造协变的非阿贝尔流，我们必须寻找规范势的一个局域多项式 $X_\mu^\alpha(A)$ ，它的规范变换性质如下：

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{x} (T_\theta X_\mu^\alpha) B_\mu^\alpha &= - \int d\mathbf{x} ([\theta, \mathbf{x}^\alpha])^\alpha B_\mu^\alpha \\ &\quad - \int d\mathbf{x} (\delta_\theta \mathbf{a}^\alpha) \theta^\alpha\end{aligned}\quad (10.2.10)$$

若我们能找到这样一个多项式 $X_\mu^\alpha(A)$ ，那么协变流为：

$$\tilde{J}_\mu^\alpha = J_\mu^\alpha + X_\mu^\alpha(A) \quad (10.2.11)$$

它的变换性质

$$T_\theta \tilde{J}_\mu^\alpha = -([\theta, \tilde{J}^\mu])_\alpha \quad (10.2.12)$$

为协变的。

在4-维中，自旋为 1/2 的费米子非阿贝尔自洽反常是已知的：

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^\alpha(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} t^\alpha \partial_\mu (A_\nu \partial_\alpha A_\beta \\ &\quad + \frac{1}{2} A_\nu A_\alpha A_\beta)\end{aligned}\quad (10.2.13)$$

因此 (10.2.10) 式变为

$$\int d\mathbf{x} \{T_\theta X_\mu^\alpha + ([\theta, X^\mu])_\alpha\} B_\mu^\alpha = - \int d\mathbf{x} (\delta_\theta \mathbf{a}^\alpha) \theta^\alpha$$

$$= -\frac{t}{48\pi^2} \int d\mathcal{X} e^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \theta^\alpha B_\nu^\beta \operatorname{tr} \{ (t^\alpha t^\beta + t^\beta t^\alpha) F_{\alpha\beta} \\ - t^\alpha t^\beta A_\alpha A_\beta - t^\beta t^\alpha A_\alpha A_\beta - t^\alpha A_\alpha t^\beta A_\beta \} \quad (10.2.14)$$

由此我们求得唯一的结果

$$X_\alpha^\mu = -\frac{1}{48\pi^2} e^{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{tr} t^\alpha (A_\nu F_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} A_\nu \\ - A_\nu A_\alpha A_\beta) \quad (10.2.15)$$

我们现在可以计算协变反常 $\tilde{\alpha}^\alpha$ 了, 直接计算协变流我们得:

$$\tilde{\alpha}^\alpha = (D_\mu \tilde{J}^\mu)^\alpha = \alpha^\alpha + D_\mu X_\alpha^\mu \\ = -\frac{1}{32\pi^2} e^{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{tr} t^\alpha F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad (10.2.16)$$

现在我们来讨论高维的情况。在 $2n-2$ 维中, 自洽反常由 ω_{2n-2}^1 的时空积分给出; 自洽性条件可写作为

$$\xi \int \omega_{2n-2}^1 = 0 \quad (10.2.17)$$

在 4.2 节中, 我们已经得到了反常的明显表达式

$$\int \omega_{2n-2}^1 = n(n-1) \int_0^1 dt (1-t) \int P(dv, A, F^{n-2}) \\ (10.2.18)$$

利用偶的 (对易的) 无穷小参数 θ , 和规范变换 T_θ , 我们可以重新写出自洽性条件

$$T_\theta A = D\theta = d\theta + [A, \theta] \\ T_\theta F = [F, \theta] \quad (10.2.19)$$

T_θ 对参数本身并不作运算。用 θ 代替鬼 v , 则反常对 θ 是线性的, 且用 $\theta \cdot \alpha [A, F]$ 表之 (“ $\cdot$ ” 表示积分及内部指标的求和)。

$\theta \cdot \alpha$ 满足自洽性条件

$$T_\theta (\theta' \cdot \alpha) - T_{\theta'} (\theta \cdot \alpha) = [\theta, \theta'] \cdot \alpha \quad (10.2.20)$$

它等价于 (10.2.17) 式。从定义

$$T_\theta W[A] = \theta \cdot \alpha \quad (10.2.21)$$

即可得到 (10.2.20) 式。我们定义流 $(n-1)$ -形式

$$\dot{J} = \delta W / \delta A \quad (10.2.22)$$

那么 (10.2.21) 可以写作为

$$\theta \cdot DJ \equiv \theta \cdot (dJ + [A, J]) = \theta \cdot \alpha \quad (10.2.23)$$

(记住 J 是奇的)。

我们计算对易子

$$(\delta T_\theta - T_\theta \delta) W[A] \quad (10.2.24)$$

其中 δ 定义为

$$\delta A = B \quad \delta F = DB = dB + [A, B] \quad (10.2.25)$$

B 是奇的而算子 δ 是偶的。因为

$$T_\theta = D\theta \cdot \frac{\delta}{\delta A} = (dA + [A, A]) \cdot \frac{\delta}{\delta A} \quad (10.2.26)$$

那么对易子 (10.2.24) 式等于

$$[B, \theta] \cdot \frac{\delta W}{\delta A} = [B, \theta] \cdot J \quad (10.2.27)$$

另一方面利用 (10.2.21) 和 (10.2.22) 两式, 对易子 (10.2.24) 式等于

$$\delta(\theta \cdot J) - T_\theta(B \cdot J) \quad (10.2.28)$$

因此,

$$\begin{aligned} T_\theta(B \cdot J) &= -[B, \theta] \cdot J + \delta(\theta \cdot \alpha) \\ &= -B \cdot [\theta, J] + \delta(\theta \cdot \alpha) \end{aligned} \quad (10.2.29)$$

上式右边第一项是协变的。由于反常的出现, 上式右边第二项表明 J 并非协变地变换。在 (10.2.29) 式中, B 在由 T_θ 生成的规范变换下是不变的。若我们约定 B 按下述方式进行变换

$$T_\theta B = [B, \theta] \quad (10.2.30)$$

那么 (10.2.29) 式变为

$$T_\theta(B \cdot J) = \delta(\theta \cdot \alpha) \quad (10.2.31)$$

又由于

$$\delta\theta = 0 \quad (10.2.32)$$

因此 (10.2.30)~(10.2.32) 式完全确定了流 J 的变换规律。

现我们来寻找局域的 $(n-1)$ -形式 X 使得新的流

$$\tilde{J} = J + X \quad (10.2.33)$$

协变地变换。这意味着

$$T_\theta(B \cdot \tilde{J}) = 0 \quad (10.2.34)$$

因此我们必须要求

$$T_\theta(B \cdot X) = -\delta(\theta \cdot \alpha) \quad (10.2.35)$$

这个 X 满足的方程可用反对易的参数 v 重新写作为

$$\xi(B \cdot X) = \delta \int \omega_{2n-2}^1(v, A, F) \quad (10.2.36)$$

且

$$\delta v = 0 \quad (10.2.37)$$

这里我们已经利用了公式

$$v \cdot \alpha[A, F] = \int \omega_{2n-2}^1(v, A, F) \quad (10.2.38)$$

现在我们可以解出方程 (10.2.36) 了。定义奇的算子 l :

$$lA = 0 \quad lF = B \quad lv = 0 \quad lB = 0 \quad (10.2.39)$$

则我们有关系

$$dl + ld = \delta \quad (10.2.40)$$

把上式应用到 ω_{2n-2}^1 上我们求得

$$\begin{aligned} \delta \omega_{2n-2}^1 &= d(l\omega_{2n-2}^1) + ld\omega_{2n-2}^1 \\ &= d(l\omega_{2n-2}^1) - l\xi\omega_{2n-1}^0 \end{aligned} \quad (10.2.41)$$

这里我们已用了递降方程。由于算子 l 和 ξ 反对易:

$$l\xi + \xi l = 0 \quad (10.2.42)$$

把 (10.2.41) 式对紧致化的时空积分得

$$\delta \int \omega_{2n-2}^1 = \xi \int l\omega_{2n-1}^0 \quad (10.2.43)$$

把 (10.2.43) 式和 (10.2.36) 式比较得

$$B \cdot X = \int l\omega_{2n-1}^0 \quad (10.2.44)$$

这样我们可以从 ω_{2n-1}^0 的明显表达式来求得 X 的明显表达式。利

用 $lF_i = tB$, 我们得

$$B \cdot X = n(n-1) \int_0^1 dt \int P(B, A, F_i^{n-1}) \quad (10.2.45)$$

例如对四维中的内部 $SU(n)$ 对称性,

$$P(F^3) = c \operatorname{tr} F^3 \quad (10.2.46)$$

(c 为一已知的常数)。那么

$$\omega_3^0 = c \operatorname{tr} (F^2 A - \frac{1}{2} F A^3 + \frac{1}{10} A^5) \quad (10.2.47)$$

$$\begin{aligned} l\omega_3^0 &= c \operatorname{tr} \left\{ B(F A + A F - \frac{1}{2} A^3) \right\} \\ &= c \operatorname{tr} \left(B(d A A + A d A + \frac{3}{2} A^3) \right) \end{aligned} \quad (10.2.48)$$

所以

$$X = c \left(d A A + A d A + \frac{3}{2} A^3 \right) \quad (10.2.49)$$

利用 (10.2.45) 式我们可得完全相同的结果

$$\operatorname{tr}(BX) = 6c \operatorname{Str} \left(B A \left(\frac{1}{3} F - \frac{1}{12} A^2 \right) \right) \quad (10.2.50)$$

因为流 $\tilde{J} = J + X$ 协变地变换, 它的协变散度也是协变的。为了计算它, 我们需要计算 $DX = dX + [A, X]$ 。得到 DX 的最简单的方式是利用分部积分

$$v \cdot DX = Dv \cdot X \quad (10.2.51)$$

(记住 v 是奇的)。这样初看起来似乎上式的右边能直接从 (10.2.45) 式通过代换

$$B = Dv \quad (10.2.52)$$

来得到。然而这是不允许的, 原因是 B 和 v 均是奇的, 且算子 D 也是奇的。正确的方法是先把 (10.2.45) 重新写作为

$$c \cdot X = n(n-1) \int_0^1 dt \int P(c, A, F_i^{n-1}) \quad (10.2.53)$$

其中 c 是偶的。现在我们可以令上式中的 c 等于

$$c = Dv \quad (10.2.54)$$

它给出

$$Dv \cdot X = n(n-1) \int_0^1 dt \, t \int P(dv + [A, v], A, F^n; \tau^2) \quad (10.2.55)$$

我们也知道

$$v \cdot DJ = Dv \cdot J = n(n-1) \int_0^1 dt (1-t) \int P(dv, A, F^n; \tau^2) \quad (10.2.56)$$

所以

$$\begin{aligned} v \cdot D\tilde{J} &= n(n-1) \int_0^1 dt \int P(dv + t[A, v], A, F^n; \tau^2) \\ &= n(n-1) \int_0^1 dt \int P(v, dA + t[A, A], F^n; \tau^2) \\ &= n \int_0^1 dt \, \frac{d}{dt} \int P(v, F^n; \tau^2) \\ &= n \int P(v, F^{n-1}) \end{aligned} \quad (10.2.57)$$

它即是反常的协变形式。

10.3 协变反常的上同调分析

在上节中我们证明了自洽和协变反常对应于不同流的协变散度；它们均是反常的正确形式。本节中我们从联络空间上同调出发来推导协变和自洽反常间的联系。

设 M 为紧致化的时空， P 为 M 上结构群为 G 的主丛。 $\mathcal{U}$ 表丛 P 上联络形的集合， $\mathcal{G}$ 为 P 的规范变换群。用纤维丛的语言，联络空间 $\mathcal{U}$ 可描述作为底为 $\mathcal{U}/\mathcal{G}$ ，结构群为 $\mathcal{G}$ 的纤维丛。我们可以局域上把 $\mathcal{U}$ 参数化为

$$\begin{aligned} A &= g^{-1}(a+d)g \\ a &\in \mathcal{U}/\mathcal{G} \quad g \in \mathcal{G} \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

在 $\mathcal{G}$ 中的余切矢为

$$\begin{aligned} \delta A &= g^{-1}\delta a g - D_A(g^{-1}\delta g) \\ D_A &\equiv d + [A, \cdot] \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

我们引入 $\mathcal{U}$ 上的联络形

$$\mathcal{A} = -G_A D_A^+ \delta A \quad (10.3.3)$$

$G_A = (D_A^+ D_A)^{-1}$ 是Green函数算子。 $\mathcal{A}$ 有如下重要的性质

$$\mathcal{A}|_{\text{纤维}} = g^{-1}\xi g \equiv v \quad (10.3.4)$$

ξ 为沿纤维的变分即规范变分。

引入投影算子 $P = D_A G_A D_A^+$, $P^2 = P$, 我们可以把 δA 分成水平分量 $\delta_h A$ 和垂直分量 $\delta_v A$:

$$\delta_h A = (1 - D_A G_A D_A^+) \delta A \quad (10.3.5a)$$

$$\delta_v A = D_A G_A D_A^+ \delta A = -D_A \mathcal{A} \quad (10.3.5b)$$

在 $M \times \mathcal{U}/\mathcal{G}$ 上的 $(g(x), g(\cdot), x, A)$ 处总的联络形为

$$A + \mathcal{A} = A - G_A D_A^+ \delta A \quad (10.3.6)$$

对应的曲率形为

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= (d + \delta)(A + \mathcal{A}) + (A + \mathcal{A})^2 \\ &= F + (\mathcal{F})_1^{\circ} + (\mathcal{F})_0^{\circ} \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} F &= dA + A^2(\mathcal{F})_1^{\circ} = \delta A + D_A \mathcal{A} \\ (\mathcal{F})_0^{\circ} &= \delta \mathcal{A} + \mathcal{A}^2 \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

可以证明

$$(\mathcal{F})_1^{\circ} = \delta_h A \quad (10.3.9a)$$

$$(\mathcal{F})_0^{\circ} = \delta_h \mathcal{A} \quad (10.3.9b)$$

(10.3.9a) 式即为 (10.3.5b) 式; 从 (10.3.9b) 式我们得

$$\delta_h \mathcal{A} = -\mathcal{A}^2 \quad (10.3.10)$$

现在设 $P(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 的 n -秩不变多项式, 那么 Bianchi 等式

$$(d + \delta)\mathcal{F} + [A + \mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0 \quad (10.3.11)$$

意味着

$$(d + \delta)P(\mathcal{F}^*) = 0 \quad (10.3.12)$$

所以

$$P(\mathcal{F}^*) = (d + \delta)\omega_{2n-1}^{\circ}(A + \mathcal{A}) \quad (10.3.13)$$

其中 $\omega_{2n-1}^{\circ}(A + \mathcal{A})$ 由Chern的“transgression”公式给出:

$$\omega_{2n-1}^{\circ}(A + \mathcal{A}) = n \int_0^1 dt P(A + \mathcal{A}, \mathcal{F}_t^{n-1}) \quad (10.3.14)$$

$$\mathcal{F}_t = t\mathcal{F} + (t^2 - t)(A + \mathcal{A})^2$$

当限制到垂直方向时, (10.3.13) 式变为

$$P(F^*) = (d + \delta_*)\omega_{2n-1}(A + \mathcal{A}) \quad (10.3.15)$$

其中

$$\omega_{2n-1}(A + \mathcal{A}) = n \int_0^1 dt P(A + \mathcal{A}, \mathcal{F}_t^{n-1})$$

$$\mathcal{F}_t = tF + (t^2 - t)(A + \mathcal{A})^2 \quad (10.3.16)$$

把 $\omega_{2n-1}(A + \mathcal{A})$ 对 $\mathcal{A}$ 展开,

$$\omega_{2n-1}(A + \mathcal{A}) = \sum_k \omega_{2n-2k-1}^k(A; \mathcal{A}) \quad (10.3.17)$$

我们从 (10.3.15) 式得

$$\begin{aligned} P(F^*) &= d\omega_{2n-1}^0(A) & \delta_*\omega_0^{2n-1}(\mathcal{A}) &= 0 \\ \delta_*\omega_{2n-2k-1}^k(A; \mathcal{A}) &= -d\omega_{2n-2k-1}^k(A; \mathcal{A}) \end{aligned} \quad (10.3.18)$$

(10.3.18) 式即是联络空间上 δ_* - d 递降方程。

一般说来, $\mathcal{A}$ 除了包含 v 部分外还含另一部分 u ,

$$\mathcal{A} = u + v \quad u|_{\text{纤维}} = 0 \quad (10.3.19)$$

因此, 沿垂直方向的变分 δ_* 不应与沿纤维的变分 ξ 相同, 两者之间的差记为 $\overline{\delta}$, 那么

$$\delta_* = \xi + \overline{\delta} \quad (10.3.20)$$

利用 (10.3.10), (10.3.19) 和 (10.3.20) 式, 我们得

$$\begin{aligned} (\xi + \overline{\delta})(u + v) &= \xi v + \overline{\delta} u + \overline{\delta} v + \xi u \\ &= -(u + v)^2 \end{aligned} \quad (10.3.21)$$

当限制到纤维上时, 上式变为

$$\overline{\delta} v + \xi v = -v^2 \quad (10.3.22)$$

它导致等式

$$\xi v = -v^2 \quad \overline{\delta} v = 0 \quad (10.3.23)$$

把 (10.3.22) 式代入 (10.3.21) 式给出

$$\overline{\delta} u = -u^2 \quad \xi u = -[v, u] \quad (10.3.24)$$

而由 (10.3.5b) 式我们有

$$\xi A = -D_A v \quad \overline{\delta} A = -D_A u \quad (10.3.25)$$

等式 (10.3.23)~(10.3.25) 完全确定了算子 ξ 和 $\overline{\delta}$ 。容易证明

$$\xi^2 = \overline{\delta}^2 = \xi \overline{\delta} + \overline{\delta} \xi = 0 \quad (10.3.26)$$

它意味着 ξ 和 $\overline{\delta}$ 也是上边缘算子。

把 $\omega_{2n-k-1}^k(A; \mathscr{A}) = \omega_{2n-k-1}^k(A; u+v)$ 按 u 和 v 的幂次展开

$$\omega_{2n-k-1}^k(A; u+v) = \sum_j \omega_{2n-k-1}^{j, k-j}(A; u, v) \quad (10.3.27)$$

这里第一个上标表 u 的幂次, 第二个上标表 v 的幂次, 我们从 (10.3.18) 式得到

$$\begin{aligned} & \overline{\delta} \omega_{2n-k-1}^{j, k-j+1}(A; u, v) + \xi \omega_{2n-k-1}^{j, k-j}(A; u, v) \\ &= -d \omega_{2n-k-2}^{j, k-j+1}(A; u, v) \end{aligned} \quad (10.3.28)$$

对 $j=0, 1$ 和 $k+1$, 我们有

$$\xi \omega_{2n-k-1}^{0, k}(A; v) = -d \omega_{2n-k-2}^{0, k+1}(A; v) \quad (10.3.29a)$$

$$\begin{aligned} & \overline{\delta} \omega_{2n-k-1}^{0, k}(A; v) + \xi \omega_{2n-k-1}^{1, k-1}(A; u, v) \\ &= -d \omega_{2n-k-2}^{1, k}(A; u, v) \end{aligned} \quad (10.3.29b)$$

$$\overline{\delta} \omega_{2n-k-1}^{k, 0}(A; u) = -d \omega_{2n-k-2}^{k+1, 0}(A; u) \quad (10.3.29c)$$

对变量 A, F, u 和 v , 我们能定义偶算子 l :

$$\begin{aligned} lA &= 0 \quad lF = \overline{\delta} A = -D_A u \\ lv &= l dv = 0 \quad lu = 0 \\ ldu &= \overline{\delta} u = -u^2 \end{aligned} \quad (10.3.30)$$

易证算子 $l, d, \xi, \overline{\delta}$ 满足关系

$$ld - dl = \overline{\delta}$$

$$\xi l - l\xi = 0 \quad (10.3.31)$$

应用 (10.3.31) 式, 我们可把 (10.3.29b) 式化作为

$$\xi \tilde{\omega}_{2n-1}^{1,k-1}(A; u, v) = -d \tilde{\omega}_{2n-2}^{1,k}(A; u, v) \quad (10.3.32)$$

其中

$$\tilde{\omega}_{2n-1}^{1,k-1}(A; u, v) = \omega_{2n-1}^{1,k-1}(A; u, v) - l \omega_{2n-1}^{0,k-1}(A; v) \quad (10.3.33)$$

(10.3.32) 式是一组新的递降方程。 $\tilde{\omega}_{2n-1}^{1,k-1}(A; u, v)$ 的具体表达式可以从 4.2 节中给出的已知表达式求得。例如考虑非阿贝尔规范场和自旋 1/2 的费米场相互作用的情况, 此时不变多项式正比于曲率形乘积的积。对 $n=3$, 我们求得,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_4^{1,0}(A; u) &= 3 \text{ctr}(u F^2) + \frac{3}{2} c d \text{tr}[u(A d A \\ &\quad + d A A + \frac{4}{3} A^3)] \\ \tilde{\omega}_3^{1,1}(A; u, v) &= c \text{tr}\left[(d v u + u d v) \left(\frac{3}{2} d A + \frac{1}{2} A^2\right) \right. \\ &\quad \left. + d v A u A\right] + \frac{3}{2} c d \text{tr}[A(d v u + u d v)] \\ \tilde{\omega}_2^{1,2}(A; u, v) &= 3 c \text{tr}[(d v)^2 u] + c d \text{tr}[u(v d v + d v v)] \\ \tilde{\omega}_1^{1,3}(A; u, v) &= -c \text{tr}[(u v^2 + v^2 u) d v] - \frac{1}{2} c d \text{tr}(u v^3) \\ \tilde{\omega}_0^{1,4}(A; u, v) &= \frac{1}{2} c \text{tr}(u v^4) \end{aligned} \quad (10.3.34)$$

c 是已知的常数。

形式 $\tilde{\omega}_{2n-2}^{1,0}(A; u)$ 的时空积分将等同为 $(2n-2)$ -维中的协变反常; 方程

$$\xi \int_{\text{时空}} \tilde{\omega}_{2n-2}^{1,0}(A; u) = 0 \quad (10.3.35)$$

是协变反常必须满足的协变条件。我们现在从自洽性条件出发来证实这一点。为此, 我们用泛函微分算子 $X_*(\mathscr{A})$ 来表示规范

变换:

$$X_a(x) = \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + \left(A_\mu \times -\frac{\delta}{\delta A_\mu} \right)_a = \left(D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \right)_a. \quad (10.3.36)$$

$X_a(x)$ 构成代数

$$[X_a(x), X_b(y)] = f_{ab} X_c(x) \delta(x-y) \quad (10.3.37)$$

X_a 作用在真空泛函 $W[A]$ 上产生自洽流非守恒方程:

$$X_a(x) W[A] = a^a[A](x) \quad (10.3.38)$$

泛函 $W[A]$ 的存在性意味着自洽性条件

$$X_a(x) a_b(y) - X_b(y) a_a(x) = f_{ab} a_c(x) \delta(x-y) \quad (10.3.39)$$

我们引入两组反对易的标量场 $u_a(x)$ 和 $v_a(x)$ 且引入符号:

$$\begin{aligned} v \cdot X &\equiv \sum_a \int d^4x v_a(x) X_a(x) \\ u \cdot X &\equiv \sum_a \int d^4x u_a(x) X_a(x) \\ v \cdot a &\equiv \sum_a \int d^4x v_a(x) a_a(x) \\ u \cdot a &\equiv \sum_a \int d^4x u_a(x) a_a(x) \end{aligned} \quad (10.3.40)$$

那么自洽性条件 (10.3.39) 变成

$$u \cdot X v \cdot a + v \cdot X u \cdot a - (v \times u) \cdot a = 0 \quad (10.3.41)$$

对 A_μ^a 的变换可重新写作为

$$\begin{aligned} \xi A_\mu^a &= v \cdot X A_\mu^a \\ \overline{\delta} A_\mu^a &= u \cdot X A_\mu^a \end{aligned} \quad (10.3.42)$$

若我们也假定 u_a 和 v_a 以如下方式变换

$$\begin{aligned} \xi u_a &= -(v \times u)_a \\ \overline{\delta} v_a &= 0 \end{aligned} \quad (10.3.43)$$

则 (10.3.41) 式变为

$$\xi(u \cdot \alpha) + \overline{\delta}(v \cdot \alpha) = 0 \quad (10.3.44)$$

用微分形式的符号, (10.3.44) 变为

$$\xi \int \text{tr } u \cdot \alpha [A] + \overline{\delta} \int \text{tr } v \cdot \alpha [A] = 0 \quad (10.3.45)$$

我们可以把 $\text{tr } v \cdot \alpha [A]$ 等同为 $\omega_{2n-2}^{0,1}(A; v)$, 把 $\text{tr } u \cdot \alpha [A]$ 等同作 $\omega_{2n-2}^{1,0}(A; u)$, 则利用通常的递降方程和 (10.3.31) 式我们发现:

$$\xi \int \omega_{2n-2}^{1,0}(A; u) - l \omega_{2n-1}^0(A) = 0 \quad (10.3.46)$$

上式左边的第一项对应于自洽流的协变散度, 第二项对应于上节中求得的补偿部分的协变散度。这样我们看到 $\widetilde{\omega}_{2n-2}^{1,0}(A; u) \equiv \omega_{2n-2}^{1,0}(A; u) - l \omega_{2n-1}^0(A)$ 是协变流的协变散度且满足协变条件。 $\widetilde{\omega}_{2n-2}^{1,0}(A; u)$ 即 $(2n-2)$ -维中的协变反常! 类似地, 我们期望形式 $\widetilde{\omega}_{2n-3}^{1,1}(A; u, v)$ 的空间积分是联系到协变反常的 SJJ 项, 它满足:

$$\xi \int_{\text{空间}} \widetilde{\omega}_{2n-3}^{1,1}(A; u, v) = 0 \quad (10.3.47)$$

这个方程对与协变反常相联系的 SJJ 项强加了所谓的“协变”约束。

第11章

反规范理论的自洽量子化

11.1 引言

对反常的规范理论，习惯上人们认为应该抛弃它们，或修改它们使得反常在量子化前是不出现的，否则规范不变性的失去会导致理论是非么正的和不可重正的。坚持在量子化前就使反常消去的观点还有两方面是成功的：第一，在标准的电弱统一模型中，它预言了轻子和夸克（重子）在数量上是相同的，第二，人们运用它得到了非常有限的几个无反常的超弦理论，许多人相信超弦是正确的统一理论。那么人们不禁要问：是否放弃一个反常的规范理论是真正必要的呢？有没有更优美的方法使得我们从一开始就自洽地量子化一个反常的理论呢？

从上面章节中的讨论我们已经知道：由于手征反常的出现，实现规范对称性的表示是射影的，而不是忠实的。这一点本身在量子理论中是不足为奇的。然而当我们强加Gauss约束

时，困难就出现了。在经典理论中，因Gauss定律约束算子 G^0 是场方程的时间分量，故我们要求 G^0 等于零。但在量子理论中，由于 G^0 相互并非是对易的，因此 $G^0 = 0$ 并不能满足。如果约束代数是封闭的，即约束相互对易，那么约束是“第一类”的。无反常的理论属于这种情况。此时我们可以把约束加在物理态上，即 G^0 作用在物理态上等于零。这就是通常的量子化一个无反常理论的方法。当理论有反常时，我们先把反常消去，然后进行量子化。这个方法保持了模型的规范不变性。然而在反常的理论中，射影表示及约束代数中对应的扩张的出现使得约束变成为“第二类”的了。因此习惯的量子化无反常理论的方法对反常理论就不再适用了。

我们在上面提到习惯的方法对统一模型提供了强有力的、有用的约束。那么是什么目的使人们想到放弃习惯的量子化反常理论的方法呢？（记住：习惯的方法是在量子化前就把反常消去，从而等价于量子化一个无反常的理论）。我们的回答是：除了统一各种相互作用力以外，我们也必须理解规范对称性破缺和规范玻色子质量的起源。大统一理论和弦场论对这两个问题均无明确的答案。反常现象似乎与此有联系。如果我们在一个现实的4-维模型中能自洽地量子化一个反常规范理论的话，那么我们将会发现反常可以使这两个突出的物理疑难得到令人满意的解答，而没有必要引入不现实的Higgs 机制或动力学对称破缺机制。因此，寻找新的自洽地量子化反常规范理论的方法是有重要的物理意义的。

11.2 规范不变的方法

尽管在自洽地量子化一个反常规范理论方面目前还没有什

么实质性的进展，但是人们已经猜测成功的规范不变的量子化也许会导致在费米子-规范场系统的有效作用量中出现 Wess-Zumino-Witten 项 (1-上闭链)。那么费米子行列式的规范非不变性将受到规范非不变的 WZW 项的补偿。(出现在 WZW 项中的标量场被看作泛函哑积分变量，在某种意义上它类似于 Faddeev-Popov 鬼)。以这样一种方式，总的作用量将保持规范不变的。

这样一个修改的正则量子化的过程目前还没有被人们实现。主要的困难是：只有在理论已经用习惯的方法量子化以后，约束代数的第二类性质才通过量子反常呈现出来。

然而下述各种各样的尝试是令人鼓舞的。

I. 使消除反常的费米子退耦合：

考虑一个4-维规范理论，其中手征费米子是配对好了的，使得理论是无反常的；理论中也会有 Higgs 场 ϕ ，它们使费米子获得质量。通过让 Higgs 拉氏量的参数为无限大，我们可以使一些手征费米子退耦合。对剩下的手征费米子，反常不再相互抵消。然而退耦的费米子导致场 $U = \phi/|\phi|$ 的一个 Wess-Zumino-Witten 项，这个 WZW 项使得规范不变性得以保持。上述过程就可以看作量子化反常规范理论的方法！说得更确切些，我们首先扩大反常理论以使它是无反常的，此时量子化是直接的。然后我们令参数为无限大来去掉我们不需要的附加部分，从而使我们回到原有的反常理论。然而，用这种方法时，手征场 U 会有一动能项。这个动能项对规范不变性来说是不需要的，因此有可能破坏原有理论的可重正性。

II. 有限体积中的反常理论：

为了避免手征场的动能项，我们可以考虑有限体积中的反常规范理论。在边界上，费米子满足一定的手征边界条件。使这样的费米子退耦合会在有效作用量中导致一个 WZW 项，从而使规范不变性得以保持。

为了说明手征边界条件可以导致一个WZW项,我们选四维杂化手征袋模型作一个例子。我们将看到,通常的手征边界条件会在袋内费米子诱导的作用量中导致一WZW项。

我们考虑(3+1)-维中任意的静态手征口袋 $B = V^3 \times S^1$ 。3-维区域 V^3 有光滑的边 $\Sigma^2 = \partial V^3$, Σ^2 不必是单连通的。袋 B 内填满Dirac费米子 ψ , 它们是没有规范化的 $SU(n)_f$ 对称群的基础表示。在袋内, 动力学由自由场拉氏量

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi \quad (11.2. II .1)$$

描述。在袋外我们有 $SU(n)_f$ Skyrme子。袋外作用量的WZW项部分为:

$$\overline{\Gamma}_{WZW} = 2\pi i \int_{\overline{V}^3 \times S^1 \times [0,1]} d^5 x \Omega_5^0 \quad (11.2. II .2)$$

其中

$$\Omega_5^0 = -\frac{i}{480\pi^3} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho\delta} \text{tr} I_\mu I_\nu I_\sigma I_\rho I_\delta$$

$$I_\mu = U^{-1} \partial_\mu U \quad U(x) = \exp(2if^a q^a(x))$$

$\overline{V}^3$ 是 V^3 的补余部分, 即 $V^3 \times S^1 + \overline{V}^3 \times S^1 = \mathbf{R}^3 \times S^1 \equiv$ 整个时空。

在袋边界 Σ^2 上, ψ 满足如下的手征边界条件:

$$\begin{aligned} i \overrightarrow{\gamma} \cdot \hat{n} \psi &= \exp(2i\gamma^5 q(x)) \psi \\ q(x) &= t^a q^a(x) \end{aligned} \quad (11.2. II .3)$$

$\hat{n}$ 为 Σ^2 上向外的单位法矢。

我们想证明手征边条件(10.2. II .3)将在由(10.2. II .1)式诱导的作用量上生成一个WZW项。为此目的, 我们进行有限的手征转动:

$$\psi(x) \rightarrow \exp(-i\gamma^5 q(x)) \psi(x) \equiv U_5 \psi(x) \quad (11.2. II .4)$$

那么扭曲的边条件〔记为TBC〕(10.2. II .3)变成为“周期性”的边条件(简记为PBC):

$$i \overrightarrow{\gamma} \cdot \hat{n} \psi(x) = \psi(x) \quad (11.2. II .5)$$

但是在袋内的费米子变成有相互作用的了，

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(x) (i\phi + U_5 i\phi U_5) \psi(x) \quad (11.2. \text{II} .6)$$

这样手征转动消去了 (10.2. II .1) 式中的 TBC，代价是在拉氏量中引入非平庸的背景相互作用。

用路径积分的语言，我们有：

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{\text{TBC}} \mathcal{D}\psi_{\text{TBC}} \exp\left(-\int_{V^3 \times S^1} d^4x \bar{\psi}_{\text{TBC}} i\phi \psi_{\text{TBC}}\right) \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{\text{PBC}} \mathcal{D}\psi_{\text{PBC}} \exp\left(-\int_{V^3 \times S^1} d^4x \psi_{\text{PBC}} (i\phi + U_5 i\phi U_5) \psi_{\text{PBC}}\right) \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\chi}_{\text{PBC}} \mathcal{D}\chi_{\text{PBC}} J \exp\left(-\int_{V^3 \times S^1} d^4x \bar{\chi}_{\text{PBC}} i\phi \chi_{\text{PBC}}\right) \end{aligned} \quad (11.2. \text{II} .7)$$

J 为手征转动：

$$\psi_{\text{PBC}}(x) = \exp(i\gamma^5 q(x)) \chi_{\text{PBC}} \equiv U_5^{-1} \chi_{\text{PBC}}(x) \quad (11.2. \text{II} .8)$$

的Jacobian因子，它由下式给出：

$$J = \frac{\det[i\phi]_{\text{TBC}}}{\det[i\phi]_{\text{PBC}}} = \frac{\det[i\phi + U_5 i\phi U_5]_{\text{PBC}}}{\det[i\phi]_{\text{PBC}}} \quad (11.2. \text{II} .9)$$

由此可得在袋内我们有如下的费米子诱导的作用量：

$$S_F = -\ln J \quad (11.2. \text{II} .10)$$

为计算Jacobian因子 J ，我们考虑单参数 s 相关的变换：

$$\psi_{\text{PBC}}(x) = U_5^{-1}(s) \chi_{\text{PBC}}(x) \equiv \exp(i\gamma^5 q(x)s) \chi_{\text{PBC}}(x) \quad (11.2. \text{II} .11)$$

$s \in [0, 1]$ 是实参数，它允许我们通过无穷小的变换的叠加来得到有限的变换（细节见下一节）。那么

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\bar{\psi}_{\text{PBC}} \mathcal{D}\psi_{\text{PBC}} \exp\left(-\int_{V^3 \times S^1} d^4x \bar{\psi}_{\text{PBC}} (i\phi + U_5 i\phi U_5) \psi_{\text{PBC}}\right) \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\chi}_{\text{PBC}} \mathcal{D}\chi_{\text{PBC}} J(s) \exp\left(-\int_{V^3 \times S^1} d^4x \bar{\chi}_{\text{PBC}} [i\phi \right. \\ & \quad \left. + X(s) + \gamma_5 A(s)] \chi_{\text{PBC}}\right) \end{aligned} \quad (11.2. \text{II} .12)$$

其中

$$\mathbf{X}(s) = \frac{1}{2} \{ e^{i(1-s)q} \phi e^{-i(1-s)q} + e^{-i(1-s)q} \phi e^{i(1-s)q} \} \quad (11.2. \text{ II } .13a)$$

$$\mathbf{A}(s) = \frac{1}{2} \{ e^{i(1-s)q} \phi e^{-i(1-s)q} - e^{-i(1-s)q} \phi e^{i(1-s)q} \} \quad (11.2. \text{ II } .13b)$$

我们考虑对应于如下正规化算子的本征矢 $\phi_n(s)$ 。

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \phi + \mathbf{X}(s) + \gamma_5 \mathbf{A}(s) \\ \phi(s) \phi_n(s) &= \lambda_n(s) \phi_n(s) \\ \langle \phi_n(s) | \phi_m(s) \rangle &= \delta_{nm} \end{aligned} \quad (11.2. \text{ II } .14)$$

可以证明, Jacobian因子 (10.2. II .9) 由下式给出:

$$J = J(s=1) = \exp \left(-2i \int_0^1 ds W(s) \right) \quad (11.2. \text{ II } .15a)$$

其中

$$W(s) = \sum_n \langle \phi_n(s) | \gamma_5 q | \phi_n(s) \rangle \quad (11.2. \text{ II } .15b)$$

从 (10.2. II .15b) 我们有:

$$W(s) = \int_{V \times S^1} d^4 x \text{tr}^o (q(x) \omega(x, s)) \quad (11.2. \text{ II } .16a)$$

$$\omega(x, s)^{ba} = \sum_n \phi_n^{+a}(s) \gamma_5 \phi_n^b(s) \quad (11.2. \text{ II } .16b)$$

上式中的求和是无定义的, 我们用算子 $\phi(s)$ 来使它正规化:

$$\omega(x, s)^{ba} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \phi_n^{+a}(x, s) \gamma_5 (e^{-\phi^2(x) Z M^2})^{ba} \phi_n^b(x, s) \quad (11.2. \text{ II } .17)$$

经过冗长的, 但直接的计算我们求得

$$\begin{aligned} W(s) &= \int_{V \times S^1} d^4 x \frac{-1}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr}^o \left\{ q(x) [F_{\mu\nu}(s) F_{\sigma\rho}(s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} G_{\mu\nu}(s) G_{\sigma\rho}(s) - \frac{8}{3} (A_\mu(s) A_\nu(s) F_{\sigma\rho}(s) \right. \end{aligned}$$

$$+ F_{\mu\nu}(s) A_\sigma(s) A_\mu(s) + A_\mu(s) F_{\nu\sigma}(s) A_\nu(s) \\ + \frac{32}{3} A_\mu(s) A_\nu(s) A_\sigma(s) A_\rho(s) \} \quad (11.2. \text{II} .18)$$

其中

$$F_{\mu\nu}(s) = \partial_\mu V_\nu(s) - \partial_\nu V_\mu(s) + [V_\mu(s), V_\nu(s)] \\ + [A_\mu(s), A_\nu(s)] \quad (11.2. \text{II} .19a)$$

$$G_{\mu\nu}(s) = \partial_\mu A_\nu(s) - \partial_\nu A_\mu(s) + [V_\mu(s), A_\nu(s)] \\ + [A_\mu(s), V_\nu(s)] \quad (11.2. \text{II} .19b)$$

$$V_\mu(s) = \frac{1}{2} \{ e^{i s q} \partial_\mu e^{-i s q} - e^{-i s q} \partial_\mu e^{i s q} \}$$

$$A_\mu(s) = \frac{1}{2} \{ e^{i s q} \partial_\mu e^{-i s q} + e^{-i s q} \partial_\mu e^{i s q} \} \quad (11.2. \text{II} .19c)$$

利用 (10.2. II .15a), (10.2. II .16a), (10.2. II .18) 和 (10.2. II .19) 我们得:

$$J = \exp(-S_F) = \exp\left(\frac{-i}{24\pi^2} \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^3 \times S^1} d^4 x e^{\mu\nu\sigma\rho} \right. \\ \cdot \text{tr}^c [q(x) e^{-i2sq} \partial_\mu e^{i2sq} e^{-i2sq} \partial_\nu e^{i2sq} \\ \cdot e^{-i2sq} \partial_\sigma e^{i2sq} e^{-i2sq} \partial_\rho e^{i2sq}]) \\ = \exp\left(-\frac{1}{24\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3 \times S^1 \times [0,1]} d^5 x e^{\mu\nu\sigma\rho} \delta \text{tr}^c (U^{-1} \partial_\mu U \right. \\ \cdot U^{-1} \partial_\nu U U^{-1} \partial_\sigma U U^{-1} \partial_\rho U U^{-1} \partial_\delta U) \\ \left. \cdot U^{-1} \partial_\delta U\right) \\ = \exp\left(-2\pi i \int_{\mathbb{R}^3 \times S^1 \times [0,1]} d^5 x \Omega_5^0\right) \quad (11.2. \text{II} .20)$$

因此袋内费米子诱导的作用量为

$$S_F = -\ln J = 2\pi i \int_{\mathbb{R}^3 \times S^1 \times [0,1]} d^5 x \Omega_5^0 \quad (11.2. \text{II} .21)$$

它即为WZW项。

III. 对所有规范势积分:

我们考虑手征规范理论:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A) &= \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} i \left[\not{\partial} + A \frac{1-\gamma_5}{2} \right] \psi \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R + \bar{\psi}_L i (\not{\partial} + A) \psi_L\end{aligned}\quad (11.2. \text{III}.1)$$

从前面的章节中的讨论可知, 这个理论是反常的。即真空泛函,

$$\begin{aligned}\exp(iW[A]) &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(iS(\psi, \bar{\psi}, A)) \\ S(\psi, \bar{\psi}, A) &= \int d^4x \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A)\end{aligned}\quad (11.2. \text{III}.2)$$

不能规范不变地正规化:

$$\begin{aligned}W[A'] &\neq W[A] \\ A'_\mu &= g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g\end{aligned}\quad (11.2. \text{III}.3)$$

换句话说, 费米子路径积分测度 $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi$ 在手征变换下并非不变的。那么, 每一个规范等价的场位形对真空-真空振幅给出不同的贡献。所以我们必须对所有场位形, 包括规范等价的场位形, 进行积分! 这是与无反常规范理论的不同之处。在处理无反常规范理论中, 我们只需对规范不等价的场位形进行积分!

下面, 我们推导在对所有场位形的积分与只对规范场位形的规范等价类的“代表”进行的积分之间的关系。为此目的, 我们引入规范固定条件: $f[A] = 0$, 且假定从 $f[A'] = 0$ 我们可唯一地解出 g 。应用 Faddeev-Popov 的技巧, 我们定义 $\Delta_f[A]$:

$$\Delta_f[A] \int \mathcal{D}_g \delta(f[A']) = 1 \quad (11.2. \text{III}.4)$$

这里 $\mathcal{D}_g$ 代表在对称群上的不变测度。

真空-真空振幅为

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu \exp(iS(\psi, \bar{\psi}, A)) \quad (11.2. \text{III}.5)$$

在上式中代入 (10.2. III.4) 式, 我们有

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu \mathcal{A}_f[A] \mathcal{D}g \delta(f[A']) \\ \times \exp(iS(\psi, \bar{\psi}, A)) \quad (11.2. \text{III}.6)$$

在变量变换 $A_\mu \rightarrow A_\mu'^{-1}$ 下, 我们假定 $\mathcal{D}A$ 是不变的, $\mathcal{D}A_\mu'^{-1} = \mathcal{D}A_\mu$, 因此 (10.2. III.6) 式可写作为

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathbf{D}A_\mu \mathcal{D}g \exp(iS(\psi, \bar{\psi}, A'^{-1})) \\ \mathbf{D}A_\mu \equiv \mathcal{D}A_\mu \mathcal{A}_f[A] \delta(f[A]) \quad (11.2. \text{III}.7)$$

若我们重新定义费米场:

$$\psi_L \rightarrow \psi_L' = g^{-1} \psi_L \quad \bar{\psi}_L \rightarrow \bar{\psi}_L' = \bar{\psi}_L g \quad (11.2. \text{III}.8)$$

那么拉氏量变成原来的形式。在无异常理论的情况下, 我们可以这样正规化这些理论使得费米场的这种重新定义并不给出附加的效应。因此, 泛函积分中的被积函数是与 g 无关的, 对“规范体积”的积分 $\int \mathcal{D}g$ 给出一个物理上并不重要的无限大因子, 从而可以扔掉。然而, 对反常的规范理论, 费米子路径积分测度在变换式 (10.2. III.8) 下并非是不变的, 而是会产生一个非零的 Jacobian 因子。可以证明这个 Jacobian 因子等于 WZW 项:

$$\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' \exp(i\alpha^1(A, g^{-1})) \quad (11.2. \text{III}.9)$$

另一方面, 若我们积掉 (10.2. III.7) 式中的 $\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi$, 则,

$$Z = \int \mathbf{D}A_\mu \mathcal{D}g \exp(iW[A'^{-1}]) \\ = \int \mathbf{D}A_\mu \mathcal{D}g \exp(iW[A] + i\alpha^1(A, g^{-1})) \\ = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathbf{D}A_\mu \mathcal{D}g \exp\{iS(\psi, \bar{\psi}, A) \\ + i\alpha^1(A, g^{-1})\} \\ \equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathbf{D}A_\mu \mathcal{D}g \exp(i\tilde{S}(\psi, \bar{\psi}, A)) \quad (11.2. \text{III}.10)$$

其中

$$\alpha^1(A, g) = W[A^g] - W[A] \quad (11.2. \text{III}. 11)$$

它即为 WZW 项, 且满足 1-上闭链条件。我们称作用量 $\tilde{S}(\psi, \bar{\psi}, A)$ 为“标准作用量”,

$$\tilde{S}(\psi, \bar{\psi}, A) = S(\psi, \bar{\psi}, A) + \alpha_1(A, g^{-1}) \quad (11.2. \text{III}. 12)$$

把标准作用量取作为起点, 我们可以运用算子体系, 图形技术或非微扰方法等等来描述反常理论。

(10.2. III. 10) 式的诱人性性质是它是规范不变的。为看到这点, 我们定义有效作用量,

$$\begin{aligned} \exp(iS_{eff}[A]) &\equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}g \exp(i\tilde{S}(\psi, \bar{\psi}, A)) \\ &\equiv \int \mathcal{D}g \exp(iS_1(A, g)) \end{aligned} \quad (11.2. \text{III}. 13)$$

应用 $\mathcal{D}g$ 是规范不变测度这个事实, 我们得

$$\begin{aligned} \exp(iS_{eff}[A^h]) &= \int \mathcal{D}g \exp(iS_1(A^h, g)) \\ &= \int \mathcal{D}g \exp(iS_1(A, gh^{-1})) \\ &= \int \mathcal{D}(gh^{-1}) \exp(iS_1(A, gh^{-1})) \\ &= \exp(iS_{eff}[A]) \end{aligned} \quad (11.2. \text{III}. 14)$$

从对整个空间的积分与在空间中坐标系的选取无关这一事实, 我们可以自然地理解上述的规范不变性。在 (10.2. III. 14) 式中, 我们是沿着既包含 A^h 也包含 A 的整个规范轨道进行积分的, 所以结果与 h 无关。

积掉 (10.2. III. 10) 式中的 g 场, 我们得:

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu \exp(iS_2(\psi, \bar{\psi}, A)) \quad (11.2. \text{III}. 15)$$

$S_2(\psi, \bar{\psi}, A)$ 中包含有消除反常的非局域项。这样的修改改变了作用量的 A° 依赖性, 从而也许使得 Gauss 定律约束的对易子中反常为零。

然而我们不能把上述的过程看作从量子力学第一原理的一个真正的推导过程。Faddeev-Popov 技巧只是一个逃避约束的冗长的正规分析的一个技巧。我们知道在习惯的规范理论中, 这个技巧是成功的。但是对更加复杂的约束系统, 并不能证明 Faddeev-Popov 技巧是成立的。在目前的情况下, 我们并不清楚为什么我们应该对所有的规范场 (势) 进行积分。由于不定度规的出现, 对所有规范位形进行积分也许会破坏正定性和 (或) 么正性。的确, 在我们下节将要讨论的 2-维可解模型中, 上述过程是破坏么正性的。

11.3 规范非不变的方法

由于上节中所提到的一般过程中还存许多有待回答的问题, 故本节中我们转向一些简单的模型——2-维反常的规范理论。我们首先计算 2-维反常规范理论的 Jacobian 因子。

考虑 2-维反常规范理论的 Euclidean 拉氏量的费米子部分:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F^{\pm} &= -\bar{\psi} \left(i \not{\partial} + A \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \psi \\ &= -\bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R - \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L\end{aligned}\quad (11.3.1)$$

厄米算子 $\not{\partial}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\not{\partial} &= \gamma_\mu D_\mu = i \not{\partial} + A = \gamma_\mu (i \partial_\mu + A_\mu) \\ \partial_\mu^\pm &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \pm i \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu) \\ A_\mu^\pm &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \pm i \varepsilon_{\mu\nu} A_\nu)\end{aligned}\quad (11.3.2)$$

厄米的 γ -矩阵满足下列关系

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu = i\epsilon_{\mu\nu} \gamma_5, \quad (\mu, \nu = 0, 1) \\ \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1$$

真空泛函为

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}_R \mathcal{D}\psi_R \mathcal{D}\bar{\psi}_L \mathcal{D}\psi_L \exp\left(-\int d^2x \mathcal{L}_F^s\right) \quad (11.3.3)$$

如果我们进行一有限的 γ_5 变换:

$$\psi_L(x) = V_5 \chi_L \equiv \exp(\gamma_5 \varphi) \chi_L = \exp(-\varphi) \chi_L \\ \equiv V^{-1} \chi_L, \\ \bar{\psi}_L(x) = \bar{\chi}_L \exp(\gamma_5 \varphi) = \bar{\chi}_L \exp(\varphi) \quad (11.3.4)$$

$\varphi(x)$ 是 $SU(n)$ 李代数的元素, 我们暂时让它是任意的。拉氏量 (11.3.1) 变成

$$\mathcal{L}_F^s = -\bar{\psi}_R i \not{\partial}^+ \psi_R - \bar{\chi}_L \not{\tilde{\phi}} - \chi_L \quad (11.3.5)$$

其中

$$\not{\tilde{\phi}} = i \not{\phi}^- + \tilde{A} \quad \tilde{A}^- = \gamma_\mu \tilde{A}_\mu^- = A + V \not{\phi}^- (V^{-1}) \\ \tilde{A}_\mu = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu\nu}) \tilde{A}_\nu, \\ \tilde{A}_\nu = A_\nu + V D_\nu (V^{-1}) \quad (11.3.6)$$

真空泛函为

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}_R \mathcal{D}\psi_R \mathcal{D}\bar{\psi}_L \mathcal{D}\psi_L \exp\left\{\int d^2x (\bar{\psi}_R i \not{\partial}^+ \psi_R \right. \\ \left. + \bar{\psi}_L \not{\tilde{\phi}} \psi_L)\right\} \\ = \int \mathcal{D}\bar{\psi}_R \mathcal{D}\psi_R \mathcal{D}\bar{\chi}_L \mathcal{D}\chi_L J[A] \\ \cdot \exp\left\{\int d^2x (\bar{\psi}_R i \not{\partial}^+ \psi_R + \bar{\chi}_L \not{\tilde{\phi}} - \chi_L)\right\} \quad (11.3.7)$$

$J[A]$ 即变换 (11.3.4) 的Jacobian因子。

我们定义左手费米测度 $\mathcal{D}\bar{\psi}_L \mathcal{D}\psi_L$:

$$\mathcal{D}\bar{\psi}_L \mathcal{D}\psi_L = \prod_{n=1}^{\infty} d\bar{b}_n da_n \quad (11.3.8a)$$

其中

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &= \sum_{\lambda_n \geq 0} a_n \varphi_n^L(x) \\ \bar{\psi}_L(x) &= \sum_{\lambda_n \geq 0} \bar{b}_n \varphi_n^R(x)^+ \end{aligned} \quad (11.3.8b)$$

$\varphi_n^L(x)$ 和 $\varphi_n^R(x)$ 为“手征”正交基:

$$\begin{aligned} \varphi_n^L(x) &= \begin{cases} \frac{1-\gamma_5}{\sqrt{2}} \varphi_n(x) & \lambda_n > 0 \\ \frac{1-\gamma_5}{2} \varphi_n(x) & \lambda_n = 0 \end{cases} \\ \varphi_n^R(x) &= \begin{cases} \frac{1+\gamma_5}{\sqrt{2}} \varphi_n(x) & \lambda_n > 0 \\ \frac{1+\gamma_5}{2} \varphi_n(x) & \lambda_n = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11.3.8c)$$

$\{\varphi_n(x)\}$ 是某个“正规化算子” $\hat{\phi}$ 的正交本征函数集合:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} \varphi_n(x) &= \lambda_n \varphi_n(x) \\ \langle \varphi_n(x) | \varphi_m(x) \rangle &= \delta_{nm} \end{aligned} \quad (11.3.9)$$

关键问题是我们选择什么样的 $\hat{\phi}$! 一般说来, 我们把 $\hat{\phi}$ 选作为包含在 $\mathcal{D}_F^*$ 中的算子 ϕ^- 。这样的选择要求量子费米子行列式只依赖于 A_-^+ 。然而如果我们应用由反常规范理论所允许的完整的正规化自由度, 我们可以把量子费米子行列式看作 A_-^+ 以及 A_-^+ 的泛函! 这样允许我们选择更一般的正规化算子 $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= i\varphi^- + bA^- + i\varphi^+ + aA^+ \\ &= i\varphi + aA^+ + bA^- \equiv i\phi + \hat{A} \end{aligned} \quad (11.3.10)$$

其中 a 和 b 是任意的正规化参数。参数 b 描述的不确定性对应

于我们可以加任意的非局域抵消项 (Bardeen 抵消项) 到有效作用量上。这样我们可以令 $b = 1$ 。单个参数 a 就能完全反映出完整的正规化不确定性。我们暂时保持 b 的任意性。在 (11.3.4) 式中定义的新场 χ_L 和 $\bar{\chi}_L$ 也可以用 $\varphi_n^L(x)$ 和 $\varphi_n^R(x)$ 来展开:

$$\begin{aligned}\chi_L(x) &= \sum_{\lambda_n \geq 0} a_n' \varphi_n^L(x) \\ \bar{\chi}_L(x) &= \sum_{\lambda_n \geq 0} \bar{b}_n' \varphi_n^R(x)^+ \end{aligned} \quad (11.3.11a)$$

其中

$$\begin{aligned}a_n' &= \sum_{\lambda_n \geq 0} \langle \varphi_m^L(x) | V | \varphi_n^L(x) \rangle > a_n \\ \bar{b}_n' &= \sum_{\lambda_n \geq 0} \langle \varphi_m^R(x) | V^{-1} | \varphi_n^R(x) \rangle \bar{b}_n \end{aligned} \quad (11.3.11b)$$

因此, 由变换 (11.3.4) 所引起的 Jacobian 因子为

$$\mathcal{D} \bar{\psi}_L \mathcal{D} \psi_L = J[A] \mathcal{D} \bar{\chi}_L \mathcal{D} \chi_L = (\det c_{m,n}) \mathcal{D} \bar{\chi}_L \mathcal{D} \chi_L \quad (11.3.12a)$$

$$\begin{aligned} \det c_{m,n} &= \{ \det \langle \varphi_m^L(x) | V | \varphi_n^L(x) \rangle_{\lambda_n \geq 0} \} \\ &\quad \cdot \{ \det \langle \varphi_m^R(x) | V^{-1} | \varphi_n^R(x) \rangle_{\lambda_n \geq 0} \} \\ &= \det \langle \varphi_m(x) | V^{-1} | \varphi_n(x) \rangle_{\text{所有的 } \lambda_n} \end{aligned} \quad (11.3.12b)$$

为了计算行列式 (11.3.12b), 我们考虑与单参数 t 相关的变换:

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &= V_\delta(t) \chi_L \equiv \exp(\gamma_\delta \varphi(x)t) \chi_L \\ &= \exp(-\varphi(x)t) \chi_L \equiv V^{-1}(t) \chi_L, \\ \bar{\psi}_L(x) &= \bar{\chi}_L \exp(\gamma_\delta \varphi(x)t) = \bar{\chi}_L \exp(\varphi(x)t) \end{aligned} \quad (11.3.13)$$

$t \in [0, 1]$ 为实参数, 它允许我们通过叠加无穷小的变换来得到整个的变换 (11.3.4)。然而在我们通过叠加无穷小变换来得到整个变换的过程中, 定义在 (11.3.10) 式中的 $\hat{\phi}$ 步步均在改

变。因此在变换的每一步，我们均必须取与那一步对应的正规化算子的本征矢作我们的展开基。

利用在 (11.3.13) 式中定义的新场，拉氏量 (11.3.1) 为：

$$\mathcal{L}_F^R = -\overline{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R - \overline{\chi}_L \not{\partial} \chi_L \quad (11.3.14a)$$

其中厄米算子 $\phi^-(t)$ 由下式给出

$$\phi^-(t) = i \not{\partial}^- + A^-(t) \quad (11.3.14b)$$

$$A^-(t) = A^- + V(t) \phi^-(V^{-1}(t)) \equiv \gamma_\mu A_\mu^-(t)$$

$$A_\mu^-(t) = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} - i \varepsilon_{\mu\nu}) A_\nu(t)$$

$$A_\nu(t) = A_\nu + V(t) D_\nu (V^{-1}(t)) \quad (11.3.14c)$$

且 $A(t)$ 满足关系式

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = -\phi(t)(\varphi) = -i\phi\varphi - [A(t), \varphi]$$

$$A(t)|_{t=0} = A \quad A(t)|_{t=1} = V A V^{-1} + V i \not{\partial} V^{-1} \quad (11.3.15)$$

按照导致 (11.3.10) 式完全相同的论证，我们考虑对应于下面的正规化算子 $\hat{\phi}(t)$ 的本征矢 $\hat{\phi}_n(x; t)$

$$\hat{\phi}(t) \hat{\phi}_n(x; t) = \lambda_n(t) \hat{\phi}_n(x; t)$$

$$\langle \hat{\phi}_n(x; t) | \hat{\phi}_m(x; t) \rangle = \delta_{nm}$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t) &= i \not{\partial}^- + b A^-(t) + i \not{\partial}^+ + a A^+ \\ &= i \not{\partial}^+ + a A^+ + b A^-(t) \equiv i \not{\partial} + \hat{A}(t) \end{aligned} \quad (11.3.16)$$

那么 Jacobian 因子由下式给出

$$\begin{aligned} J[A] &= \det c_{n,n} = \exp\left(-\int_0^1 dt w(t) dt\right) \\ &\equiv \exp(-W) \end{aligned} \quad (11.3.17a)$$

其中

$$w(t) = \sum_n \langle \hat{\phi}_n(t) | \gamma_5 \varphi | \hat{\phi}_n(t) \rangle \quad (11.3.17b)$$

为了计算上式中的指数 W ，我们把 $w(t)$ 写作为

$$w(t) = \int d^2x \operatorname{tr}(\varphi(x) \omega(x, t)) \quad (11.3.18a)$$

而

$$\omega(x, t)^{\mu\nu} = \sum_s \hat{\varphi}_s^{\mu\dagger}(t) \gamma_s^{\mu\nu} \hat{\varphi}_s(t) \quad (11.3.18b)$$

上式中的求和是无定义的，我们用算子 $\hat{\phi}(t)$ 来正规化它：

$$\omega(x, t)^{\mu\nu} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_s \hat{\varphi}_s^{\mu\dagger}(t) (e^{-\hat{\phi}(t)^2 L M^2})^{\mu\nu} \hat{\varphi}_s(t) \quad (11.3.19)$$

经过冗长的计算我们得到

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr}(\varphi(x) \hat{F}_{\mu\nu}(x, t)) \\ \hat{F}_{\mu\nu}(x, t) &= \partial_\mu \hat{A}_\nu(t) - \partial_\nu \hat{A}_\mu(t) + [\hat{A}_\mu(t), \hat{A}_\nu(t)] \end{aligned} \quad (11.3.20)$$

这样 W 为：

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \int_0^1 dt \epsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr} \{ \varphi \partial_\mu \hat{A}_\nu(t) \\ &\quad + \varphi \hat{A}_\mu(t) \hat{A}_\nu(t) \} \end{aligned} \quad (11.3.21)$$

首先我们来算出手征Schwinger模型的 W 。对这样一个阿贝尔的模型，上式变为

$$W = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \int_0^1 dt \epsilon_{\mu\nu} \varphi \partial_\mu \hat{A}_\nu(t) \quad (11.3.22a)$$

$$\hat{A}_\mu(t) = a A_\mu^+ + b A_\mu^- (t)$$

$$A_\mu^- (t) = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} - i \epsilon_{\mu\nu}) A_\nu(t)$$

$$A_\mu(t) = A_\mu + V(t) i \partial_\mu V^{-1}(t) = A_\mu - i t \partial_\mu \varphi \quad (11.3.22b)$$

把 (11.3.22b) 代入 (11.3.22a) 我们得：

$$W = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \varphi \partial_\mu (a A_\nu^+ + b A_\nu^-) + \frac{1}{8\pi} b \int d^2x \varphi \square \varphi \quad (11.3.23)$$

在手征Schwinger模型的情况下, 规范场 A_μ 总能写作如下形式

$$A_\mu = \partial_\mu \xi - i \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \eta \quad (11.3.24a)$$

$$\xi = \delta_{\mu\nu} \frac{\partial_\nu}{\square} A_\nu, \quad \eta = -i \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial_\nu}{\square} A_\nu \quad (11.3.24b)$$

而从 (11.3.22b) 我们有

$$A_\mu^\pm = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} \pm i \varepsilon_{\mu\nu}) A_\nu = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} \pm i \varepsilon_{\mu\nu}) \partial_\nu (\xi \mp \eta) \quad (11.3.25)$$

这样如果我们选择有限变换 (11.3.4) 中的 φ 为

$$\varphi = -i(\xi + \eta) = -i(\delta_{\mu\nu} - i \varepsilon_{\mu\nu}) \frac{\partial_\mu}{\square} A_\nu \quad (11.3.26)$$

那么拉氏量中的费米场完全退耦合, 即:

$$\begin{aligned} Z[A] &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}_R \mathcal{D}\psi_R \mathcal{D}\bar{\psi}_L \mathcal{D}\psi_L \exp\left(-\int d^2x \mathcal{L}_F^R\right) \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}_R \mathcal{D}\psi_R \mathcal{D}\bar{\chi}_L \mathcal{D}\chi_L J[A] \\ &\quad \cdot \exp\left\{\int d^2x (\bar{\psi}_R i \not{\partial}^+ \psi_R + \bar{\chi}_L i \not{\partial}^- \chi_L)\right\} \\ &= J[A] \end{aligned} \quad (11.3.27)$$

最后我们得:

$$\begin{aligned} Z[A] &= J[A] = \exp(-W) \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{8\pi} \int d^2x A_\mu \left[2a \delta_{\mu\nu} - b(\delta_{\mu\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \varepsilon_{\mu\alpha}) \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\square} (\delta_{\beta\nu} - i \varepsilon_{\beta\nu}) \right] A_\nu\right\} \end{aligned} \quad (11.3.28)$$

回到Minkowski空间且化到我们前面的章节中所用的度规（相应地 γ -矩阵也化到前面章节中的 γ -矩阵），我们得 Minkowski 空间中的结果：

$$\begin{aligned} Z[A] &= J[A] = \exp(iW) \\ &= \exp \left[\frac{i}{8\pi} \int d^2x A_\mu \left[a g^{\mu\nu} - (g^{\mu\nu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{\mu\sigma}) \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\square} (g^{\beta\nu} - e^{\beta\nu}) \right] A_\nu \right\} \end{aligned} \quad (11.3.29)$$

这里我们已选择了有效作用量中非局域抵消项使得 $b=1$ 。

我们然后回到非阿贝尔的情况。完全与阿贝尔的情况相同，在非阿贝尔情形下，仍存在有费米场变量的改度它使得费米子完全退耦合。在退耦合规范中，规范场 A_μ 能写作为：

$$A = -e^{-i\xi} i\phi(e^{\gamma_5\eta}) e^{-\gamma_5\eta} e^{i\xi} + e^{-i\xi} i\phi e^{i\xi} \quad (11.3.30a)$$

场 ξ 和 η 在 $SU(n)$ 的李代数中取值，直接的计算给出：

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu\nu}) e^{-i\xi} e^{-\eta} i\partial_\nu (e^\eta) e^{i\xi} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} + i\varepsilon_{\mu\nu}) e^{-i\xi} e^\eta i\partial_\nu (e^{-\eta}) e^{i\xi} \\ &\quad + e^{-i\xi} i\partial_\mu e^{i\xi} \end{aligned} \quad (11.3.30b)$$

因此

$$\begin{aligned} A_\mu^+ &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} + i\varepsilon_{\mu\nu}) A_\nu \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} + i\varepsilon_{\mu\nu}) e^{-i\xi} e^\eta i\partial_\nu (e^{-\eta} e^{i\xi}) \end{aligned} \quad (11.3.30c)$$

$$\begin{aligned} A_\mu^- &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu\nu}) A_\nu \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} - i\varepsilon_{\mu\nu}) e^{-i\xi} e^{-\eta} i\partial_\nu (e^\eta e^{i\xi}) \end{aligned} \quad (11.3.30d)$$

如果我们选择 (11.3.4) 中的 φ 满足如下关系

$$\exp \varphi = \exp \eta \cdot \exp \eta^\dagger \quad (11.3.31)$$

那么费米场拉氏量完全从规范场中退耦合,

$$\begin{aligned} Z[A] &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}_R \mathcal{D}\psi_R \mathcal{D}\bar{\psi}_L \mathcal{D}\psi_L \exp \left(\int d^2x (\bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \right. \\ &\quad \left. + \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L) \right) \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}_R \mathcal{D}\psi_R \mathcal{D}\bar{\chi}_L \mathcal{D}\chi_L J[A] \exp \left\{ \int d^2x (\bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R \right. \\ &\quad \left. + \bar{\chi}_L i \not{\partial} \chi_L) \right\} = J[A] \end{aligned} \quad (11.3.32)$$

利用 (11.3.14) 和 (11.3.15) 式我们从 (11.3.21) 式得

$$\begin{aligned} W &= \frac{-1}{2\pi} \int d^2x \text{tr}^c (a A_\mu^- A_\mu^+) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} a(b-1) \int d^2x \int_0^1 dt \text{tr}^c \{ \varphi [A_\mu^+, A_\mu^-(t)] \} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} b \int d^2x \int_0^1 dt \text{tr}^c (\varphi \partial_\mu A_\mu^-(t)) \end{aligned} \quad (11.3.33)$$

其中 φ 场满足 (11.3.31) 式且

$$A_\mu^-(t) = \exp(- (1-t)\varphi) i \partial_\mu^- \exp(1-t)\varphi \quad (11.3.34)$$

(11.3.33) 式中的第一项表明对非阿贝尔反常理论 (手征 Schwinger 模型的非阿贝尔推广), 有效作用量中可以有与正规化相依赖的 A^2 项。我们可以选择某一非局域的抵消项来固定参数 b 。下面我们令 $b=1$ 。这样:

$$\begin{aligned} Z[A] &= J[A] = \exp(-W) \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int d^2x \text{tr}^c (a A_\mu^- A_\mu^+) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int d^2x \int_0^1 dt \text{tr}^c \{ \varphi \partial_\mu A_\mu^-(t) \} \varepsilon_{\mu\nu} \right\} \end{aligned} \quad (11.3.35)$$

转回到 Minkowski 时空且回到本书中约定的度规及 γ 矩阵, 我们得 Minkowski 时空中的结果:

$$\begin{aligned}
Z[A] &= J[A] = \exp(iW) \\
&= \exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int d^2x \operatorname{tr}^c (a A_\mu^\dagger A^\mu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2\pi} \int d^2x \int_0^1 dt \varepsilon^{\mu\nu} \operatorname{tr}^c (\varphi \partial_\mu A_\nu^\dagger(t)) \right\}
\end{aligned} \tag{11.3.36}$$

把 (11.3.34) 式代入上式我们最后得

$$\begin{aligned}
Z[A] &= J[A] = \exp(iW) \\
&= \exp \left\{ \frac{i}{4\pi} \int d^2x \operatorname{tr}^c (a A_\mu A^\mu) + i\Gamma(\varphi) \right\}
\end{aligned} \tag{11.3.37}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\varphi) &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \operatorname{tr}^c \{ \partial_\mu e^\varphi \partial^\mu e^{-\varphi} \} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int d^2x \int_0^1 dt \varepsilon^{\mu\nu} \operatorname{tr}^c \{ \partial e^{t\varphi} e^{-t\varphi} \partial_\mu e^{t\varphi} e^{-t\varphi} \\
&\quad \cdot \partial_\nu e^{t\varphi} e^{-t\varphi} \}
\end{aligned} \tag{11.3.38}$$

$\Gamma(\varphi)$ 即为 2-维时空中的 WZW 项。

从上面的推导我们有 (对手征 Schwinger 模型)

$$\begin{aligned}
W[A] &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} A_\mu [a g^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. - (g^{\mu\alpha} + e^{\mu\alpha}) \cdot \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\square} (g^{\beta\nu} - e^{\beta\nu})] A_\nu \right\}
\end{aligned} \tag{11.3.39}$$

a 为任意的正规化参数。对任何 a 的值, $W[A]$ 场非规范不变的, 这是我们说手征 Schwinger 模型是反常的的原因。因为 a 不能被确定下来, 故“接触项” $\int A^2$ 的强度是任意的。在规范不变的理论中, “接触项”可由规范不变性的要求来固定下来。但在反常的规范理中, 我们设法固定 a 的值。

令 $A_\mu^{g^{-1}} = A_\mu - \partial_\mu \theta$, ($g = e^{-\theta}$), 我们可以求出 WZW 项:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(A, g^{-1}) &= W[A^{-1}] - W[A] \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} (\alpha - 1) \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta \right. \\
&\quad \left. - \theta [(\alpha - 1) \partial_\mu A^\mu + \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu] \right\} \\
&\quad (11.3.40)
\end{aligned}$$

$\alpha_1(A, g^{-1})$ 中的不确定性是由 $W[A]$ 中的不确定引起的。这样我们得“标准的作用量” $\tilde{S}(\psi, \bar{\psi}, A, g)$,

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(\psi, \bar{\psi}, A, g) &= \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right. \\
&\quad + \bar{\psi} \left(i \not{\partial} + A \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} (\alpha - 1) \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta \right. \\
&\quad \left. - \theta [(\alpha - 1) \partial_\mu A^\mu + \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu] \right\} \Bigg) \\
&\quad (11.3.41)
\end{aligned}$$

积掉上式中的 θ , 我们可得 $S_2(\psi, \bar{\psi}, A)$,

$$\begin{aligned}
S_2(\psi, \bar{\psi}, A) &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right. \\
&\quad + \bar{\psi} \left(i \not{\partial} + A \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi \\
&\quad - \frac{1}{4} m^2 F_{\mu\nu} \square^{-1} F^{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{8\pi} A_\mu [a g^{\mu\nu} - (g^{\mu\alpha} + \varepsilon^{\mu\alpha}) \\
&\quad \cdot \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\square} (g^{\beta\nu} - \varepsilon^{\beta\nu})] A_\nu \Bigg\} \\
&= S(\psi, \bar{\psi}, A) - W[A] \\
&\quad - \frac{1}{4} \int d^2x F_{\mu\nu} \square^{-1} (\square + m^2) F^{\mu\nu} \\
&\quad (11.3.42)
\end{aligned}$$

其中

$$m^2 \equiv \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \quad (11.3.43)$$

把 (11.3.42) 式对费米场积分，我们最后得有效作用量，

$$S_{eff}[A] = -\frac{1}{4} \int d^2x F_{\mu\nu} \square^{-1} (\square + m^2) F^{\mu\nu} \quad (11.3.44)$$

上式是规范不变的，此外规范玻色子获得了质量 m 。我们看到，对 $\alpha \geq 1$ ，模型是正定的和么正的。然而对 $\alpha < 1$ ，尽管理论仍具有规范不变性，但么正性却没有了！注意，在手征 Schwinger 模型中，玻色子质量 m 在 $\frac{1}{\pi}$ 与无穷大之间变化。这与通常的 Schwinger 模型不同。在 Schwinger 模型中，规范不变性确定了常数 α 的值，从而使质量 m 也确定了。

我们也可以把上面的结果看作是从一个无反常理论得来的，其中附加的消除反常的费米子已经通过令参数为无穷大退耦合了。然而这种观点也无法解释为什么当 $\alpha \geq 1$ 时理论是么正的，而 $\alpha < 1$ 时理论不是么正的。

我们也可以等价地用玻色化的作用量

$$\begin{aligned} S[A, \varphi] = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (g^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}) \partial_\mu \varphi A_\nu \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha}{4\pi} A_\mu A^\mu \right] \right\} \quad (11.3.45) \end{aligned}$$

来描述手征 Schwinger 模型。这里 α 项是由玻色化方法中的不确定性引起的。泛函积分掉 (11.3.45) 式中的 φ ，我们即得 (11.3.39) 式。玻色化的作用量 (11.3.45) 式显然含有反常。我们现在来对 (11.3.45) 式进行详细的正则量子化。我们将看到在量子化过程中确实会出现“第二类”约束！为简单

此, 我们进行重新标度, 使 (11.3.45) 化为,

$$S[A, \varphi] = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right. \\ \left. + (g^{\mu\nu} - e^{\mu\nu}) \partial_\mu \varphi A_\nu + \frac{1}{2} a A_\mu A^\mu \right\} \quad (11.3.46)$$

与此对应原来的费米拉氏量变为

$$\mathcal{L}_F = -\bar{\psi} (i \not{\partial} + \sqrt{\pi} A (1 - \gamma_5)) \psi \quad (11.3.47)$$

我们把 (11.3.46) 看作为起点。显然在规范变换: $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta$, $\varphi \rightarrow \varphi$ 下, (11.3.46) 并非是不变的。从 L 我们可得 Euler-Lagrange 方程 ($S = \int dt L$)

$$\square \varphi = - (g^{\mu\nu} - e^{\mu\nu}) \partial_\mu A_\nu \quad (11.3.48a)$$

且流

$$J^\nu \equiv -\partial_\mu F^{\mu\nu} = + (g^{\nu\alpha} + e^{\nu\alpha}) \partial_\alpha \varphi + a A^\nu \quad (11.3.48b)$$

有反常的散度:

$$\partial_\nu J^\nu = (1 - a) \partial_\mu A^\mu - e^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \quad (11.3.49)$$

从 S 得到的正则动量为:

$$\pi(x) \equiv \delta L / \delta(\partial_0 \varphi(x)) = \partial_0 \varphi + (A_0 - A_1) \quad (11.3.50a)$$

$$E(x) \equiv \delta L / \delta(\partial_0 A_1(x)) = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 \quad (11.3.50b)$$

$$\pi_0(x) \equiv \delta L / \delta(\partial_0 A_0(x)) = 0 \quad (11.3.50c)$$

正则 Poisson 括号 (P, B) 是

$$\{A_0(x), \pi_0(y)\} = \{A_1(x), E(y)\} \\ = \{\phi(x), \pi(y)\} = \delta(x - y) \quad (11.3.51)$$

所有别的 P, B 为零。(11.3.50c) 是一个约束, 它并不和 (11.3.51) 式自洽。从正则能量动量张量 $\theta^{\mu\nu}$ 得到的 Hamiltonian 为

$$H_0 = \int dx \theta^{00} = \int dx (\pi \partial_0 \varphi + E \partial_0 A_1) - S$$

$$\begin{aligned}
&= \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\partial_1 \varphi)^2 + \frac{1}{2} E^2 - (\partial_1 E) A_0 \right. \\
&\quad \left. - (\pi + \partial_1 \varphi) (A_0 - A_1) + \frac{1}{2} (A_0 - A_1)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \alpha (A_0^2 - A_1^2) \right\} \quad (11.3.52)
\end{aligned}$$

约束 (11.3.50c) 在由 H_0 生成的时间演化下的自治性要求 $G(\mathbf{x}) \equiv \{\pi_0(\mathbf{x}), H_0\} = 0$, 即:

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x}) &= \partial_1 E + (\pi + \partial_1 \varphi) + A_1 + (\alpha - 1) A_0 \\
&= \partial_1 E + J_0 = 0 \quad (11.3.53)
\end{aligned}$$

这是对理论的第二个约束, 即 Gauss 定律约束。流,

$$J_0 = \pi + \partial_1 \varphi - A_1 + (\alpha - 1) A_0 \quad (11.3.54)$$

正是 (11.3.48b) 式中定义的流 J' 的时间分量。利用 P.B., 我们可得

$$\{J_0(\mathbf{x}), J_0(\mathbf{y})\} = 2\delta'(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (11.3.55)$$

这正是期望的 Schwinger 项。然而

$$\{\partial_1 E(\mathbf{x}), J_0(\mathbf{y})\} = \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (11.3.56)$$

故

$$\{G(\mathbf{x}), G(\mathbf{y})\} = 0 \quad (11.3.57)$$

这与反常的非阿贝尔理论不同。在反常的非阿贝尔理论中, Gauss 定律约束间的对易子是非平庸的。在阿贝尔理论中, Gauss 定律约束的对易子中的反常项 (若出现的话) 总是可以通过重新定义流加以去掉。在我们的模型中, 没有这样的反常项出现。然而约束函数 $G(\mathbf{x})$ 与 H_0 以及别的约束函数 $\pi_0(\mathbf{x})$ 之间有非零的 P.B.。利用 (11.3.51) ~ (11.3.53) 式我们有:

$$\{G(\mathbf{x}), H_0\} = E(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) \partial_1 A_1(\mathbf{x}) \quad (11.3.58)$$

$$\{G(\mathbf{x}), \pi_0(\mathbf{y})\} = (\alpha - 1) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (11.3.59)$$

回忆一下, 在一个无反常的, 规范不变理论中, (11.3.59) 式是应为零的。

(11.3.59) 式告诉我们约束 $\pi_0(\mathbf{x}) = 0$ 和 $G(\mathbf{x}) = 0$ 均是“第二类”约束。现在我们把自己限于整个相空间中的某个子

流形上来考虑问题。在子流形上, $\pi_0(x)$ 和 $G(x)$ 均为零。那么自洽性要求 $\pi_0(x)$ 和 $G(x)$ 的时间导数在子流形上也为零。

(11.3.58) 式是与此相矛盾的, 但我们可以加一些正比于约束函数的项, 使得新的 Hamiltonian 满足这个要求。设正确的 Hamiltonian 量有如下形式

$$H \equiv H_0 + \int d\mathbf{x} (\pi_0(x) v_0(x) + G(x) v_1(x)) \quad (11.3.60)$$

自洽性条件现在变为

$$\{\pi_0(x), H\} = G(x) - (a-1)v_1(x) = 0 \quad (11.3.61)$$

$$\begin{aligned} \{G(x), H\} &= E(x) + (1-a)\partial_1 A_1(x) + (a-1)v_0(x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11.3.62)$$

由此我们可以在子流形上解得:

$$v_0(x) = \partial_1 A_1 - (a-1)^{-1} E(x) \quad (11.3.63a)$$

$$v_1(x) = 0 \quad (11.3.63b)$$

因此在子流形上自洽地描述动力学的 Hamiltonian 量为

$$H = H_0 + \int d\mathbf{x} \{ \pi_0 (\partial_1 A_1 - (a-1)^{-1} E) \} \quad (11.3.64)$$

注意到: (1) 因 $v_0(x)$ 和 $v_1(x)$ 是唯一确定, 故在所考虑的问题并不存在“不确定的速度”, 因此不存在规范自由度; (2) $A_0(x)$ 的运动方程为

$$0 = \partial_0 A_0(x) - \{A_0(x), H\} = \partial_0 A_0 - \partial_1 A_1 + (a-1)^{-1} E \quad (11.3.65)$$

把上式与 (11.3.48b) 式比较我们看到由 H 生成的运动方程使 J'' 的反常散度为零。

至此, 我们已令约束 $\pi_0(x)$ 和 $G(x)$ “很弱地”等于零。但他们和别的变量的 P.B. 可以是非零的。为使 $\pi_0(x)$ 和 $G(x)$ “很强地”等于零, 我们用 Dirac 括号来代替所有的 P.B.。给定 (11.3.59) 式, 系统的 P.B. 和 Dirac 括号间的关系如下

$$\{P, Q\}_D = \{P, Q\} - \frac{1}{a-1} \int dz [\{P, \pi_0(z)\} \{G(z), Q\}]$$

$$- \{P, G(x)\} \{ \pi_0(x), Q \}] \quad (11.3.66)$$

P, Q 为任意一对函数。不仅函数 $\pi_0(x)$ 与 $G(x)$ 在子流形上为零，而且它们与所有正则变量间的 Dirac 括号也为零。它们现在是“很强地”等于零。我们现在把这些约束代入 Hamiltonian 量(11.3.64)中。正比于 π_0 的项可以扔掉，别的约束(11.3.53)可以用来消去 H_0 中的 A_0 ，结果是

$$H = \int dx \frac{1}{2} \{ \pi^2 + (\partial_1 \varphi)^2 + E^2 + 2A_1(\pi + \partial_1 \varphi) \\ + (\alpha + 1)A_1^2 + (\alpha - 1)^{-1}(\partial_1 E + A_1 + (\pi + \partial_1 \varphi)^2) \} \quad (11.3.67)$$

此外，因为 φ, π, A_1 和 E 与 π_0 的 P.B. 均为零，所以 φ, π, A_1 和 E 之间的 Dirac 括号与对应的正则 P.B. 是相同的。这样我们最终得到一个经典的 Hamiltonian 量 (11.3.67)，它唯一地描述了相空间中约束子流形上的运动。在 x 点的正则变量对 $(A_1, E), (\varphi, \pi)$ 满足正规的正则 P.B. (11.3.51)。

利用下面的场变量：

$$\tilde{A} \equiv A_1 + \alpha^{-1}(\pi + \partial_1 \varphi) + \alpha^{-2} \partial_1 E$$

$$f \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi + \partial_1 \varphi + 2\alpha^{-1} \partial_1 E)$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi - \partial_1 \varphi) \quad (11.3.68)$$

我们可以更进一步把 Hamiltonian 量 (11.3.67) 简化为

$$H = \int dx \frac{1}{2} \{ m^2 \tilde{A}^2(x) + E^2(x) + m^{-2} (\partial_1 E(x))^2 \\ + f^2(x) + g^2(x) \} \quad (11.3.69)$$

$$m^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \quad (11.3.70)$$

上面的变量 $\tilde{A}(x), f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列的 P.B.

$$\begin{aligned}
\{\tilde{A}(x), E(y)\} &= \delta(x-y) \\
\{\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)\} &= \{E(x), E(y)\} = 0 \\
\{\tilde{A}(x), f(y)\} &= \{\tilde{A}(x), g(y)\} = \{E(x), f(y)\} \\
&= \{E(x), g(y)\} = \{f(x), g(y)\} = 0 \\
\{f(x), f(y)\} &= -\{g(x), g(y)\} = \delta'(x-y)
\end{aligned}
\tag{11.3.71}$$

显然, $\tilde{A}$ 和 E 构成正则共轭对, 而 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是独立的场, 且分别是自共轭和反自共轭的。现在动力学很明显了。给定 P.B. (11.3.71), Hamilton 运动方程给出

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2)E + m^2 E = 0 \tag{11.3.72a}$$

$$(\partial_0 - \partial_1)f = 0 \quad (\partial_0 + \partial_1)g = 0 \tag{11.3.72b}$$

在经典的水平上, 前面的分析对 $\alpha \equiv 1$ 成立。象通常一样, 把 $\tilde{A}, E, f$ 和 g 看作算子, 其对易子等子对应的经典 P.B. 乘以 i , 那么我们可以使理论量子化。然而对 $\alpha < 1 (m^2 < 0)$, Hamilton 量 H 并无下界。这样, 当 $\alpha < 1$ 时, 此模型并不存在自洽的, 么正的量子论。

对所有的 $\alpha > 1$, 一个么正的量子论确实存在。它由质量为 $m = \alpha/\sqrt{\alpha-1}$ 的自由粒子及自对偶和反对偶的激发组成。当 $\alpha = 2$ 时, 质量 m 有一下界 $m_0 = 2$ 。这个 m_0 正是通常的 Schwinger 模型中激化子的质量。

我们现在简要地讨论一下 $\alpha = 1$ 的情况。 $\alpha = 1$ 是理论的奇异点。当 α 从正的方向趋于 1 时, $m^2 \rightarrow \infty$, 有质量的激化从理论中消失。因此在 $\alpha = 1$ 处, $E(x) = 0$ 是从 $G(x) = 0$ 的自洽性中出现的附加约束! 约束 $E(x) = 0$ 和 $G(x) = 0$ 构成“第二类”约束集。然而 $\pi_0(x) = 0$ 变成了“第一类”约束。因此 $\alpha = 1$ 的系统确实包含了一些规范自由度。如前一样, 我们可定义新的 Dirac 括号使得 $E(x)$ 和 $G(x)$ 均“很强地”为零, 并利用 $G(x)$ 消去 A_1 。那么在由 $\pi_0(x) = G(x) = E(x) = 0$ 定义的子流形上, $\alpha = 1$ 的 Hamiltonian 量约化为

$$H = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\partial_1 \varphi)^2 + \pi_0 v_0 \right\} \quad (11.3.73)$$

这里函数 $v_0(\mathbf{x}) = \partial_0 A_0(\mathbf{x})$ 是不确定的。若我们固定规范 $A_0 = 0$ ，那么系统包含有谐和激化。上面提到的规范自由度以下述方式出现于经典作用量之中。对 $\alpha = 1$ ，我们得如下作用量

$$S = \int d\mathbf{x} dt \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi + A_\mu) (\partial^\mu \varphi + A^\mu) + \varphi E - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \quad (11.3.74)$$

很清楚，(11.3.74) 在 $E(\mathbf{x}) = 0$ 的子流形上在如下的局域变换：

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \varphi(\mathbf{x}, t) + \theta(\mathbf{x}, t) \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - \partial_\mu \theta \end{aligned}$$

下是不变的。从 (11.3.49) 式我们看到对 $\alpha = 1$ ，反常正好为 E ，它作为一个约束是为零的。变换 $\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{x})$ 的生成元是 $\pi(\mathbf{x}) = \partial_0 \varphi + A_0 - A_1$ ，且 $\partial_0 \varphi$ 正好是费米场玻色化的手征荷密度。这样这些变换可以看作在 $E = 0$ 的子流形上局域手征规范变换。对手征 Schwinger 模型的非阿贝尔推广，我们可以得到相似的结果。

第12章

结 束 语

物理从反常现象的优美的数学体系所获得的利益有三个方面：第一，我们已经理解到反常的出现是由于二次量子化的费米理论修改了变换群的习惯的表示理论——即上闭链出现。尽管这种修改从数学上看不出有多大意义，且尽管这种修改从数学上来说是可以接受的，然而它和规范不变的物理要求相矛盾；第二，数学为我们提供了反常结构的另一种非微扰的推导方法；第三，也许最重要的是一个很好建立起来的数学框架有可能导致物理工作者妥善地处理一个反常的规范理论。习惯上人们认为反常规范理论应当被抛弃掉，或者修改以使得反常在量子化以前并不出现。然而如果我们扩大规范不变性的概念使之包含它的量子力学破缺，我们就有可能使反常规范理论得以妥善的处理，而不是抛弃它们。沿着这一条路线和指导方法，我们在前一章中考查了一些简单的2-维反常模型，证明了手征Schwinger模型是自洽的和么正的；规范不变性不是明显地，或自发地破缺，而是通过量子力学破缺。若这些想法能在实际

的四维模型中得以实现，那我们发现反常解决了另一个突出的物理疑难：我们可以不引入不实际的Higgs 机制或到目前为止还无定论的动力学对称破缺机制就能使规范对称性破缺。这样很明显，反常规范理论的自洽量子化将是以后物理学研究中的重要问题之一。此问题国际上开始研究还没有多久，因此会有大量的工作可做。

参 考 文 献

- Adler, S., *Phys. Rev.* 177 (1969) 2426
- Alvarez-Gaume, L., and Ginsparg, P., *Nucl. phys.* B213(1984) 449
- Atiyah, M.F., and Singer, I.M., *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 81 (1984) 2597
- Banerjee, R., *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 1889
- Bardeen, W.A., and Zumino, B., *Nucl. Phys.* B244 (1984) 477
- Bardeen, W.A., *Phys. Rev.* 184 (1969) 1848
- Bell, J., and Jackiw, R., *Nuovo. Cim.* 60A (1969) 47
- Belavin, A.A., Polyakov, A.M., Schwarz, A.S., and Tyupkin, Yu., *Phys. Lett.* 59B (1975) 85
- Bonora, L., and Cotta-Ramusino, P., *Commun. Math. Phys.* 87 (1983) 589
- Boulware, D., Deser, S., and Zumino, B., Santa Barbara 预印本
- Boyanovsky, D., *Phys. Lett.* B178 (1986) 400
- Callan, C., Dashen, R., and Gross, D., *Phys. Lett.* 63B (1976) 334
- Chanowitz, M., *Phys. Lett.* 171B (1986) 280
- Chen, Y. X., Yue, R.H., and Zhang, Y. Z., *Phys. Lett.* B202 (1988) 587
- Chen, Y.X., and Zhang, Y.Z., NWU-IMP-87-15, (未发表)
- Chou, K. C., Guo, H. Y., and Song, X. C., in *Proc. 1st Asia Pacific Workshop on High Energy Physics*, Singapore, 1987
- Chou, K.C., Guo, H.Y., Wu, K., and Song, X.C., *Phys. Lett.* 134B (1984) 67
- Commun. in Theor. Phys. 3 (1984) 125

- Commun. in Theor. Phys. 3 (1984) 593
- Commun. in Theor. Phys. 3 (1984) 73
- Chou, K.C., Gao, H.Y., and Wu, K., Li, X.Y., and Song, X.C.,
Commun. in Theor. Phys. 3 (1984) 491
- Chou, K.C., Gao, H.Y., and Wu, K., Commun. in Theor. Phys.
4 (1985) 91
- Cronstrom, C., and Mickelsson, J., J. Math. Phys. 24 (1983) 2528
- Deser, S., Jackiw, R., and Templeton, S., Phys. Rev. Lett. 48
(1982) 975; Ann. Phys. 223 (1983) 422.
- De Witt, D.S., Phys. Rev. 125 (1962) 2189
- Faddeev, L.D., Phys. Lett. 145B (1985) 81
- Faddeev, L.D., and Slatashvili, S. L., Phys. Lett. B167 (1985)
255
- Freedman, D.Z., and Townsend, P.K., Nucl. Phys. B177 (1981)
282
- Frenkel, I., and Kac, V.G., Invent Math. 62 (1984) 455
- Friedan, D., Qiu, Z., and Shenker, S., Phys. Rev. Lett. 52 (1984)
1575
- Fubini, S., Hanson, A.J., and Jackiw, R., Phys. Rev. D7 (1973)
173
- Fujikawa, K., Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 1195
Phys. Rev. D21 (1980) 2842, 22 (1980) 1449 (E)
Phys. Rev. D29 (1984) 285
- Fujiwara, T., Kitakado, S., and Nonoyama, T., Phys. Lett.
B155 (1985) 91
- Gabrielov, A.M., Gelfand, I.M., and Lcsik, M.Y., Func. Anal.
Appl. 9 (1975) 12
- Gambos Saravi, R. E., Schaposnik, F. A., and Solomin, J.E.,
Nucl. Phys. B185 (1981) 239
- Girotti, H.O., Rothe, H. J., and Rothe, K.D., Phys. Rev. D33
(1986) 514
- Goddard, P., and Olive, D., Inter. J. Mod. Phys. A1 (1986) 303

- Gunaydin, M., and Zumino, B., LBL-19200 UCB-PTH-85/8
 Grossman, B., Phys. Lett. 152B (1985) 93
 Guo, H. Y., Wu, K., and Wang, S. K., Commun. in Theor. Phys. 4 (1985) 113
 Guo, H. Y., Ren, H. C., and Wu, K., Lett. Math. Phys. 12 (1986) 181
 Guo, H. Y., Hou, B. Y., Wang, S. K., and Wu, K.,
 Commun. in Theor. Phys. 4 (1985) 233
 Commun. in Theor. Phys. 4 (1985) 145
 Harada, K., and Tsutsui, I., Phys. Lett. 183B (1987) 311
 Harada, K., Kubota, H., and Tsutsui, I., Phys. Lett. 173B (1986) 77
 Hou, B. Y., Hou, B. Y., and Wang, P., Lett. Math. Phys. 11 (1986) 179
 Ann. Phys. 171 (1986) 172
 Hou, B. Y., and Hou, B. Y., Chin. Phys. Lett. 2 (1985) 49
 侯伯宇, 物理学报 35 (1986) 1663
 侯伯宇, 陈一新和张耀中, 中国科学A10 (1987) 1049
 Hou, B. Y., and Zhang, Y. Z., Mod. Phys. Lett. A1 (1986) 103
 J. Math. Phys. 28 (1987) 1700
 J. Phys. A21 (1988) 345
 侯伯宇和张耀中, 科大研究生院学报, «相位与近代物理» 专辑 (1986)
 Jackiw, R., in "Lectures on Current Algebra and its Applications", Princeton Univ. Press, Princeton, (1972);
 Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 159, 54 (1985), 2381; in the E. S. Fradkin Festschrift, Adam Hilger, Bristol (1985); CTP 1436
 Jackiw, R., and Johnson, K., Phys. Rev. 182 (1969) 1459
 Jackiw, R., and Rebbi, C., Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 172
 Jackiw, R., and Templeton, S., Phys. Rev. D23 (1981) 2291
 Jackiw, R., and Rajaraman, R., Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 1219
 Jo, S. G., Phys. Lett. 163B (1985) 353; Nucl. Phys. B259 (1985) 616

Jo, S. G., 私人通讯

Kephart, T., and Frampton, P., Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 1343,
1347

Lott, J., and Rajaraman, R., Phys. Lett. 163B (1985) 321

Malcev, A., Math. Sb. 78 (1955) 569

Mickelsson, J., Lett. Math. Phys. 7 (1983) 45

Commun. Math. Phys. 97 (1985) 361

Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 2380

Phys. Rev. D32 (1985) 436

Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 301

Mandelstam, S., Ann. Phys. 19 (1962) 1

Manes, J., Stora, R., and Zumino, B., Commun. Math. Phys.
102 (1986) 157

Mitra, P., Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 265

Mulders, P. J., Phys. Rev. D30 (1984) 1073

Nelson, P., and Alvarez-Gaume, L., Commun. Math. Phys. 99
(1985) 103

Niemi, A. J., and Semenoff, G. W., Phys. Rev. Lett. 55 (1985)
227

Pressley, A., and Segal, G. B., "Loop Group" (Oxford Univ.
Press) Oxford, (1981)

Rajaraman, R., Phys. Lett. 162B (1985) 148; Phys. Lett. 154B
(1985) 305

Roskies, R., Festschrift for Feza Gursey's 60th Birthday,
Symmetry in Particle Physics, I. Bars, (ed.)

Rothe, K. D., Nucl. Phys. B269 (1986) 269

Schaposnik, F. A., and Solomin, J. E., Phys. Rev. D30 (1984)
1353

Segal, G. B., Commun. Math. Phys. 80 (1985) 301

Schwinger, J., Phys. Rev. Lett. 3 (1959) 296

Song, X. C., Ann. Phys. 171 (1986) 364; AS-ITP-88-17

Stora, R., Cargese Lectures (1983)

- Townsend, P.K., and Sierra, G., Nucl. Phys. B222 (1983) 493
t'Hooft, G., Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 8
Wess, J., and Zumino, B., Phys. Lett. 37B (1971) 95
Witten, E., Nucl. Phys. B234 (1984) 422
Wu, Y.S., and Zee, A., Phys. Lett. 152B (1985) 98, Nucl. Phys. B258 (1985) 157
Wang, P., NWU-IMP-88-11
Webb, J.N., Z. Phys. C31 (1986) 301
Zhang, Y.Z., Phys. Lett. B (in press); NWU-IMP-88-24
Phys. Rev. Lett. (to be published)
Lett. Math. Phys. 14 (1987) 303
J. Phys. A21 (1988) L1055
J. Math. Phys. 29 (1988) 1241
Phys. Lett. B189 (1987) 149
Z, Phys. C36 (1987) 449, 物理学报 36 (1987) 1513
J. Phys. A20 (1987) 3099
博士论文 (1987) (未发表)
Zumino, B., Wu, Y.S., and Zee, A., Nucl. Phys. B329 (1984) 422
Zumino, B., in "Relativity, Group and Topology" (1983); Nucl. Phys. B253 (1985) 477

- Townsend, P.K., and Sierra, G., Nucl. Phys. B222 (1983) 493
t'Hooft, G., Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 8
Wess, J., and Zumino, B., Phys. Lett. 37B (1971) 95
Witten, E., Nucl. Phys. B234 (1984) 422
Wu, Y.S., and Zee, A., Phys. Lett. 152B (1985) 98, Nucl. Phys. B258 (1985) 157
Wang, P., NWU-IMP-88-11
Webb, J.N., Z. Phys. C31 (1986) 301
Zhang, Y.Z., Phys. Lett. B (in press); NWU-IMP-88-24
Phys. Rev. Lett. (to be published)
Lett. Math. Phys. 14 (1987) 303
J. Phys. A21 (1988) L1055
J. Math. Phys. 29 (1988) 1241
Phys. Lett. B189 (1987) 149
Z, Phys. C36 (1987) 449, 物理学报 36 (1987) 1513
J. Phys. A20 (1987) 3099
博士论文 (1987) (未发表)
Zumino, B., Wu, Y.S., and Zee, A., Nucl. Phys. B329 (1984) 422
Zumino, B., in "Relativity, Group and Topology" (1983); Nucl. Phys. B253 (1985) 477

- Townsend, P.K., and Sierra, G., Nucl. Phys. B222 (1983) 493
t'Hooft, G., Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 8
Wess, J., and Zumino, B., Phys. Lett. 37B (1971) 95
Witten, E., Nucl. Phys. B234 (1984) 422
Wu, Y.S., and Zee, A., Phys. Lett. 152B (1985) 98, Nucl. Phys. B258 (1985) 157
Wang, P., NWU-IMP-88-11
Webb, J.N., Z. Phys. C31 (1986) 301
Zhang, Y.Z., Phys. Lett. B (in press); NWU-IMP-88-24
Phys. Rev. Lett. (to be published)
Lett. Math. Phys. 14 (1987) 303
J. Phys. A21 (1988) L1055
J. Math. Phys. 29 (1988) 1241
Phys. Lett. B189 (1987) 149
Z, Phys. C36 (1987) 449, 物理学报 36 (1987) 1513
J. Phys. A20 (1987) 3099
博士论文 (1987) (未发表)
Zumino, B., Wu, Y.S., and Zee, A., Nucl. Phys. B329 (1984) 422
Zumino, B., in "Relativity, Group and Topology" (1983); Nucl. Phys. B253 (1985) 477