

תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם  
במודלים של אמינות, מלאי ותורים  
החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,  
תוכנית ה- M.A. עם התמחות בלוגיסטיקה,  
סמסטר אביב – תשס"ח  
מרצה: יוני נצרת.

## דוגמא לטופס מבחן סופי

### הנחיות כלליות:

- משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- המבחן מורכב מ-5 שאלות. בכל שאלה יתכנו מספר סעיפים. יש לבחור 3 מתוך 5 השאלות ולענות עליהן. משקל כל שאלה הוא 34 נקודות.
- יש לענות על השאלות במקומות המיועדים לכך בשאלון זה.
- אין להגיש דפי טיוטה.
- במידה ובמהלך המבחן עניתם על יותר מ-3 שאלות – יש למחוק (באופן ברור) את השאלות אשר אינן לבדיקה כך שלא יהיה ספק מי הן השאלות הנבחרות.

### נוסחאות שימושיות:

(א) נוסחת ליטל:  $L = \lambda W$

$L$  - ממוצע מספר הצרכנים במערכת.

$\lambda$  - קצב זרימת צרכנים דרך המערכת.

$W$  - ממוצע זמן שהייה של צרכן במערכת.

(ב) משוואות שווי משקל עבור DTMC עבור וקטור שורה:  $\pi = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \dots)$

$$\pi P = \pi$$

$$\sum \pi_i = 1$$

(ג) משוואות שווי משקל עבור CTMC עבור וקטור שורה:  $\pi = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \dots)$

$$\pi Q = 0$$

$$\sum \pi_i = 1$$

הערה: בצד ימין, 0 הוא וקטור שורה. מטריצת הגנראטור Q היא כזאת אשר סכום איברי כל שורה הוא 0, וכל האיברים אינם שלילים פרט לאיברי האלכסון אשר אינם חיוביים.

(ד) טבלת התפלגויות של משתנים מקריים

שם	פרמטרים	תומך	פונ' מסת ההסתברות או פונ' צפיפות	תוחלת	שונות
גיאומטרי סופר ניסיונות	$0 < p \leq 1$	$1, 2, 3, \dots$	$P(X = i) = (1 - p)^{i-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
גיאומטרי סופר כישלונות	$0 < p \leq 1$	$0, 1, 2, \dots$	$P(X = i) = (1 - p)^i p$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
בינומי	$0 \leq p \leq 1$ $n \in \{1, 2, \dots\}$	$0, 1, \dots, n$	$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	$np$	$np(1-p)$
פואסוני	$\lambda \in (0, \infty)$	$0, 1, 2, \dots$	$P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$	$\lambda$	$\lambda$
אקספוננציאלי	$\lambda \in (0, \infty)$	$[0, \infty)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
ארלנג (גאמא עם פרמטר בדיד)	$n \in \{1, 2, \dots\}$ $\lambda \in (0, \infty)$	$[0, \infty)$	$f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$

(ה) נוסחאות עבור מערכות תורים במצב יציב. קצב הגעות:  $\lambda$ . תוחלת זמן שרות  $1/\mu$ .

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

מערכת	התפלגות סטציונרית של מספר צרכנים במערכת	הערות
M/M/1	$\pi_i = \rho^i (1 - \rho) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \rho < 1$	פילוג זמן השהייה במערכת במצב יציב הוא $\exp(\mu - \lambda)$ .
M/M/1/K $K \in \{1, 2, \dots\}$	$\pi_i = \begin{cases} \rho^i \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1} & \rho = 1 \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, K$	
M/M/K/K $c \in \{1, 2, \dots\}$	$\pi_i = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i! \sum_{n=0}^K \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}$	
M/M/ $\infty$	$\pi_i = e^{-\rho} \frac{\rho^i}{i!} \quad i = 0, 1, 2, \dots$	

שאלה 1:

כאן השאלה (ייתכן ומורכבת ממספר סעיפים).

פתרון לשאלה 1:

המשך פתרון שאלה 1:

שאלה 2:

כאן השאלה והסעיפים.

פתרון לשאלה 2:

המשך פתרון שאלה 2:

שאלה 3:

כאן השאלה והסעיפים.

פתרון לשאלה 3:

המשך פתרון שאלה 3:



שאלה 4:

כאן השאלה והסעיפים.

פתרון לשאלה 4:

המשך פתרון שאלה 4:

שאלה 5:

כאן השאלה והסעיפים.

פתרון לשאלה 5:

המשך פתרון שאלה 5:

