תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם
במודלים של אמינות, מלאי ותורים

"הסתברות ותהליכים סטוכסטיים – לוגיסטיקה , 207.4412"

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,
תוכנית ה – .M.A עם התמחות בלוגיסטיקה,
סמסטר אביב – תשס"ח
מרצה: יוני נצרתי.

פתרון למבחן גמר

7/8/2008

<u>הנחיות כלליות:</u>

- משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: <u>מחשבון בלבד</u>.
- המבחן מורכב מ -5 שאלות. בכל שאלה יתכנו מספר סעיפים. יש לבחור 3 מתוך 5 השאלות ולענות עליהן. משקל כל שאלה הוא 34 נקודות.
- יש להגיש פתרון ל – 3 שאלות בלבד.

<u>נוסחאות שימושיות:</u>

א) נוסחת ליטל : $L = \lambda W$
L - ממוצע מספר הצרכנים במערכת.
λ - קצב זרימת צרכנים דרך המערכת.
W - ממוצע זמן שהייה של צרכן במערכת.

ב) משוואות שווי משקל עבור DTMC עבור וקטור שורה: $\pi = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \cdots)$
$$\pi P = \pi$$
$$\sum \pi_i = 1$$

ג) משוואות שווי משקל עבור CTMC עבור וקטור שורה: $\pi = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \cdots)$
$$\pi Q = 0$$
$$\sum \pi_i = 1$$
הערה: בצד ימין, 0 הוא וקטור שורה. מטריצת הגנראטור Q היא כזאת אשר סכום איברי כל שורה הוא 0, וכל האיברים אינם שליליים פרט לאיברי האלכסון אשר אינם חיוביים.

ד) טבלת התפלגויות של משתנים מקריים

שם	פרמטרים	תומך	פו' מסת ההסתברות או פו' צפיפות	תוחלת	שונות
גיאומטרי סופר ניסיונות	$0 < p \le 1$	$1,2,3,...$	$P(X=i)=(1-p)^{i-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
גיאומטרי סופר כישלונות	$0 < p \le 1$	$0,1,2,...$	$P(X=i)=(1-p)^{i}p$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
בינומי	$0 \le p \le 1$ $n \in \{1,2,..\}$	$0,1,...,n$	$P(X=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
פואסוני	$\lambda \in (0,\infty)$	$0,1,2,...$	$P(X=i)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ
אקספוננציאלי	$\lambda \in (0,\infty)$	$[0,\infty)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
ארלנג (גאמא עם פרמטר בדיד)	$n \in \{1,2,..\}$ $\lambda \in (0,\infty)$	$[0,\infty)$	$f(x)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$

ה) נוסחאות עבור מערכות תורים במצב יציב. קצב הגעות: λ. תוחלת זמן שרות $1/\mu$.
נסמן $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$.

מערכת	התפלגות סטציונרית של מספר צרכנים במערכת	הערות
M/M/1	$\pi_i=\rho^i(1-\rho)\ \ i=0,1,2,...\quad \rho<1$	פילוג זמן השהייה במערכת במצב יציב הוא $\exp(\mu-\lambda)$.
M/M/1/K $K \in \{1,2,...\}$	$\pi_i=\begin{cases}\rho^i\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & \rho\ne1\\ \frac{1}{K+1} & \rho=1\end{cases}\quad i=0,1,...,K$	
M/M/K/K $c \in \{1,2,...\}$	$\pi_i=\frac{\left(\lambda/\mu\right)^i}{i!\sum_{n=0}^{K}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}\quad i=0,1,...,K$	
$M/M/\infty$	$\pi_i=e^{-\rho}\frac{\rho^i}{i!}\ \ i=0,1,2,...$	

שאלה 1:

חנות מחזיקה מלאי של מוצר. ומחדשת אותו על פי המדיניות הבאה: בסיום כל יום נבדקת רמת המלאי. במידה ויש פחות מ-2 יחידות מחדשים את המלאי לרמה של 4 יחידות, אחרת לא מחדשים. החידוש לוקח דקות ספורות. הביקוש למוצר הוא משתנה מקרי D, (בלתי תלוי ושווה התפלגות עבור כל יום) בעל ההתפלגות הבאה:

$P(D=i)=0.7^i 0.3 \qquad$ i=0,1,2,...

כאשר הביקוש ביום גדול מכמות המוצרים, אז שארית הביקוש אינה מסופקת (הולכת לאיבוד).

א) מה הסיכוי שביום מסוים הביקוש יהיה יותר מ 10 יחידות.

ב) תאר את רמת המלאי בסוף כל יום ממש לפני רגע החידוש המלאי כשרשרת מרקוב. רשום את מרחב המצבים, רשום את מטריצת המעבר.

ג) תאר את רמת המלאי בסוף כל יום מיד לאחר רגע חידוש המלאי כשרשרת מרקוב. רשום את מרחב המצבים, רשום את מטריצת המעבר.

פתרון:

א) $P(D>10)=1-P(D\le 10)=1-\sum_{i=0}^{10}0.7^i 0.3=1-0.3\frac{1-0.7^{11}}{1-0.7}=0.02$.

ב) מרחב המצבים של השרשרת $\{X_n, n\ge 0\}$ אשר מתארת את מס' הפריטים במלאי ביום ה – n ממש לפני רגע החידוש הוא $S=\{0,1,2,3,4\}$. להלן מטריצת המעבר:

$$P=\begin{pmatrix} P(D\ge 4) & P(D=3) & P(D=2) & P(D=1) & P(D=0) \\ P(D\ge 4) & P(D=3) & P(D=2) & P(D=1) & P(D=0) \\ P(D\ge 2) & P(D=1) & P(D=0) & 0 & 0 \\ P(D\ge 3) & P(D=2) & P(D=1) & P(D=0) & 0 \\ P(D\ge 4) & P(D=3) & P(D=2) & P(D=1) & P(D=0) \end{pmatrix}$$

לצורך פתרון מספרי יש להציב $P(D=i)=0.7^i 0.3$.

ב) מרחב המצבים של השרשרת $\{X_n, n\ge 0\}$ אשר מתארת את מס' הפריטים במלאי ביום ה – n מיד לאחר רגע החידוש הוא $S=\{2,3,4\}$. להלן מטריצת המעבר:

$$P=\begin{pmatrix} P(D=0) & 0 & P(D\ge 1) \\ P(D=1) & P(D=0) & P(D\ge 2) \\ P(D=2) & P(D=1) & P(D=0)+P(D>3) \end{pmatrix}$$

לצורך פתרון מספרי יש להציב $P(D=i)=0.7^i 0.3$.

שאלה 2:

נתונה שרשרת מרקוב בזמן בדיד בעלת מרחב מצבים $S=\{0,1\}$. להלן מטריצת הסתברויות המעבר:

$$P=\begin{pmatrix} 1/3 & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}.$$

א) נתון כי ההתפלגות הסטציונרית היא $\pi=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. השלם את מטריצת הסתברויות המעבר.

ב) חשב את $P(X_{19}=1\,|\,X_{17}=1)$.

ג) נתון $P(X_0=1)=\frac{1}{4}$ חשב את $P(X_2=0)$.

פתרון:

א) לצורך השלמת המטריצה נשתמש במשוואות שווי משקל. דרושה בסך הכל משוואה אחת. ידוע:
$\frac{1}{3}\underbrace{\pi_0}_{1/2}+p_{10}\underbrace{\pi_0}_{1/2}=\underbrace{\pi_0}_{1/2}$ ולכן $p_{01}=2/3$. מכאן בגלל שסכום כל שורה הוא 1, נקבל:
$$P=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

ב) עקב הומוגניות בזמן מקבלים: $P(X_{19}=1\,|\,X_{17}=1)=P(X_2=1\,|\,X_0=1)$.
אז דרוש האיבר $p_{11}{}^{(2)}$ שהוא האיבר ה – 1,1 של המטריצה $P^{(2)}=P^2$.
מקבלים: $P^2=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}$. ולכן התשובה היא
$p_{11}{}^{(2)}=5/9$.

ג) כאת נתון וקטור התחלתי $a=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$. אנו מחפשים את $a^{(2)}$:
$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19/36 & 17/36 \end{pmatrix}=a^{(2)}$$
ולכן התשובה היא $P(X_2=0)=a_0{}^{(2)}=19/36$.

<u>שאלה 3:</u>

במפעל יש 2 מכונות ו – 2 אנשי תיקון. כל איש תיקון מתקן מכונה אחת לכל היותר ומשך זמן התיקון הוא משתנה מקרי אקספוננציאלי בעל תוחלת = 2 שעות. לאחר תיקון מכונה, משך הזמן עד לקלקול הבא של אותה מכונה הוא משתנה מקרי אקספוננציאלי בעל תוחלת = 3 שעות. נתייחס למצב המפעל בזמן t ע"י X_t, כאשר גודל זה מתאר את מס' המכונות התקינות בזמן t.

א) תאר את X_t כשרשרת מרקוב בזמן רציף, רשום את מטריצת הגנראטור.

ב) מהי ההתפלגות הסטציונרית?

ג) הנח שעבור כל מכונה תקינה, הרווח לשעה הוא 1000 ₪. רשום ביטוי עבור תוחלת הרווח של המפעל ב – 24 שעות במצב יציב. (ייצג את הביטוי באמצעות ההתפלגות הסטציונרית).

<u>פתרון:</u>

א) מרחב המצבים הוא $S=\{0,1,2\}$. מטריצת הגנראטור היא:

$$Q=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -5/6 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

ב) להלן משוואות שווי משקל:

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -5/6 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_0+\pi_1+\pi_2=1$$

ופתרונם: $\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{25} & \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$

ג) $24\cdot(\pi_0 0+\pi_1 1000+\pi_2 2000)=28,800$.

שאלה 4:

במפעל יש מכונה. המכונה יכולה להיות במצב תקין או תקול.
ידוע שמשך הזמן בין קלקול לקלקול של המכונה הוא משתנה מקרי בעל צפיפות $f_X(x) = xe^{-x}$.
ידוע שמשתנה מקרי זה מתקבל כסכום של שני משתנים מקריים אקספוננציאלים, כל אחד עם תוחלת =1. כאשר המכונה מתקלקלת, משך הזמן עד לתיקונה הוא משתנה מקרי בעל התפלגות אקספוננציאלית עם תוחלת = 1.

א) תאר את מצב המכונה כשרשרת מרקוב בזמן רציף.

ב) מהי שרשרת המרקוב המשוכנת?

ג) המפעל מרוויח 2000 שקלים לכל שעה אשר בה המכונה פעילה ומרוויח 0 שקלים לכל שעה אשר בה המכונה אינה פעילה. מהי תוחלת הרווח של המפעל לשעה (במצב יציב)?

פתרון:
הערה: בשאלה זו נפלה טעות קטנה אבל מהותית אשר לא תוקנה במהלך המבחן. המילה קלקול המסומנת בצהוב בשורה השנייה של שאלה – הייתה אמורה להיות תיקון. – לפחות זאת הייתה כוונת המשורר.

לאחר הטעות השאלה עדיין מוגדרת היטב ופתרונה אפילו יותר פשוט מהשאלה המקורית. נציג כאן את הפתרון של 2 הגרסאות (2 סוגי הפתרונות היו קבילים לצורך קבלת ניקוד).

גרסא ראשונה – כאשר המילה קלקול נשארת כמו שהיא.

א) מרחב המצבים הוא $S = \{0,1\}$ (0 – לא תקין – 1, תקין). מטריצת הגנרטור:
$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

ב) שרשרת המרקוב המשוכנת היא:
$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ג) ההתפלגות הסטציונרית (צריך להתייחס לזו של השרשרת המקורית) היא
$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

ולכן תוחלת רווח המפעל לשעה היא $2000 \cdot \frac{1}{2} = 1000$ ש"ח.

גרסא שנייה – כאשר המילה קלקול מוחלפת עם המילה תיקון.

א) מרחב המצבים הוא $S=\{0,1,2\}$ (0 – לא תקין בפאזה ראשונה, 1- לא תקין בפאזה שנייה, 2 – תקין). מטריצת הגנראטור:

$$Q=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

ב) שרשרת המרקוב המשוכנת היא:

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

ג) ההתפלגות הסטציונרית (צריך להתייחס לזו של השרשרת המקורית) היא

$$\pi=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

ולכן תוחלת רווח המפעל לשעה היא $2000\cdot\frac{2}{3}=1333.33$ ש"ח.

<u>שאלה 5:</u>

בשאלה זו נדון בתכונות של מערכת תורים M/M/1 בעלת קצב כניסת לקוחות λ ותוחלת זמן שרות לקוחות μ^{-1}. נתון $0<\lambda<\mu$.

א) מהי תוחלת מס' הצרכנים במערכת?

ב) מהי תוחלת מס' הצרכנים בתור?

ג) מהי תוחלת זמן השהייה במערכת – הסבר את תשובתך ב – 2 דרכים שונות?

<u>פתרון:</u>

א) זוהי תוחלת של מ"מ גיאומטרי סופר כישלונות בעל סיכוי הצלחה $1-\rho$: $\frac{\rho}{1-\rho}$.

ב) תוחלת בתור = תוחלת במערכת פחות תוחלת בשרות = $\frac{\rho}{1-\rho}-\rho=\frac{\rho^2}{1-\rho}$.

ג) תוחלת זמן שהייה במערכת היא $\frac{1}{\mu-\lambda}$.

דרך א': ע"י שימוש בעובדה שזמן המתנה מתפלג $\exp(\mu-\lambda)$.

דרך ב': ע"י נוסחת ליטל וסעיף א' (לחלק את התשובה של סעיף א' ב - λ).