תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם
במודלים של אמינות, מלאי ותורים

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,
תוכנית ה – M.A. עם התמחות בלוגיסטיקה,
סמסטר אביב – תשס"ח
מרצה: יוני נצרתי, עוזר הוראה: שי ישראלי.

עבודת בית מס' 0:

גרסא 3.0

תרגיל 1: תוצאות מתמטיות שימושיות.

1) k כדורים מפוזרים ב n תאים. יתכן והכדורים *זהים* או *לא זהים* וייתכן שניתן להכניס *מספר כדורים לתא* או *כדור אחד לכל היותר*. בטבלה הבאה, ציין מהו מספר האפשרויות לכל קומבינציה (הוסף הסבר קצר):

	לכל היותר כדור 1 בתא	אין מגבלה על מספר הכדורים בתא
הכדורים זהים		
הכדורים שונים		n^k

2) רשום ביטויים עבור כל אחד מהסכומים/טורים הבאים:

i) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

ii) $\sum_{k=0}^{n}a^k$

iii) $\sum_{k=0}^{\infty}a^k$ נתון $|a|<1$.

iv) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

3) השתמש בתוכנת מחשב לצורך קרוב של האינטגרל: $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ (מהו הערך המדויק?)

הדרכה: חלק את הקטע $[-5,0]$ ל $\frac{5}{\Delta}$ קטעים באורך Δ. אז $\int_{-5}^{0}f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{5/\Delta}\Delta f(-k\Delta)$.

צייר גרף (ממוחשב) של השגיאה של הקרוב הנ"ל כפונקציה של Δ עבור $\Delta\in[0.001,0.1]$.

בונוס: החישוב לעיל השתמש ב"קירוב מלבנים" של האינטגרל. בצע חישוב יותר מדויק בעזרת "קירוב טרפזים". השווה את הגרפים של השגיאה כפונקציה של Δ עבור 2 השיטות.

תרגיל 2: חישובי מטריצות.

1) עבור המטריצות A, B רשום את איבר מטריצת המכפלה AB :

i) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

ii) $A_{N\times N}=\left(a_{ij}\right),\ a_{ij}=i$ $B_{N\times N}=\left(b_{ij}\right), b_{ij}=j$ (רשום את האיבר הכללי של מטריצת המכפלה).

iii) $A_{N\times N}=\left(a_{ij}\right), a_{ij}=3^{i+j}$ $B_{N\times N}=\left(b_{ij}\right),\ b_{ij}=1$ (רשום את האיבר הכללי של מטריצת המכפלה).

iv) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (B הוא מכפלה של וקטורי עמודה ושורה).

2) צור 2 מטריצות בעלות מימד 20×20 בתוכנת מחשב. (הכנס למטריצות ערכים אקראיים כלשהם). רשום את המטריצה השווה למכפלת המטריצות.

3) פתור את מערכת המשוואות ב 4 דרכים:

$$\begin{aligned}5x_1+7x_2+8x_3&=3\\ 8x_1+9x_2-x_3&=6\\ 2x_1\qquad\quad -x_3&=0\end{aligned}$$

i) באמצעות הצבה (ידנית).

ii) באמצעות רישום כ $Ax=b$ ופתרון ע"י לכסון מטריצה (ידני).

iii) באמצעות מציאת המטריצה A^{-1} (אפשר בעזרת מחשב) והכפלה (אפשר בעזרת מחשב).

iv) באמצעות הזנת מערכת המשוואות לתוכנת מחשב (תלוי תוכנה) ופתרון באמצעות התוכנה.

תרגיל 3: משתנים מקריים בינומיים.

יהיו $X_1,X_2,...,X_n$ משתנים מקריים i.i.d המקבלים 1 בסיכוי p ו – 0 בסיכוי 1-p. יהי $N=\sum_{i=1}^{n}X_i$ (משתנה מקרי בינומי).

1) רשום את פונקצית מסת ההסתברות של N.

2) חשב את התוחלת של N ב 2 דרכים שונות:

- ע"י סיכום התוחלות של $X_1,X_2,...,X_n$.
- על פי הגדרה ($E[N]=\sum_{k=0}^{n}kP(N=k)$).

3) חשב את השונות של N (הסבר את החישוב).

4) יהי $N_1\sim Bin(n_1,p)$ ו - $N_2\sim Bin(n_2,p)$, כיצד מתפלג $Z=N_1+N_2$?

5) יהי $N_1\sim Bin(2,\frac{1}{2})$ ו - $N_2\sim Bin(1,\frac{1}{4})$ צייר את פו' מסת ההסתברות של $Z=N_1+N_2$.