תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם
במודלים של אמינות, מלאי ותורים

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,
תוכנית ה – M.A. עם התמחות בלוגיסטיקה,
סמסטר אביב – תשס"ח
מרצה: יוני נצרתי, עוזר הוראה: שי ישראלי.

<u>**פתרון** עבודת בית מס' 0:</u>

גרסא 3.0

<u>תרגיל 1: תוצאות מתמטיות שימושיות.</u>

1) k כדורים מפוזרים ב n תאים. יתכן והכדורים *זהים* או *לא זהים* וייתכן שניתן להכניס *מספר כדורים לתא* או *כדור אחד לכל היותר*. בטבלה הבאה, ציין מהו מספר האפשרויות לכל קומבינציה (הוסף הסבר קצר):

	לכל היותר כדור 1 בתא	אין מגבלה על מספר הכדורים בתא
הכדורים זהים	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$
הכדורים שונים	$\binom{n}{k}k!$	n^k

2) רשום ביטויים עבור כל אחד מהסכומים/טורים הבאים:

(i $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=(a+b)^n$

(ii $\sum_{k=0}^{n}a^k=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

(iii $\sum_{k=0}^{\infty}a^k=\frac{1}{1-a}$ נתון $|a|<1$.

(iv $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$

3) השתמש בתוכנת מחשב לצורך קרוב של האינטגרל: $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ (מהו הערך המדויק?)

הדרכה: חלק את הקטע $[-5,0]$ ל $\frac{5}{\Delta}$ קטעים באורך Δ. אז $\int_{-5}^{0}f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{5/\Delta}\Delta f(-k\Delta)$.

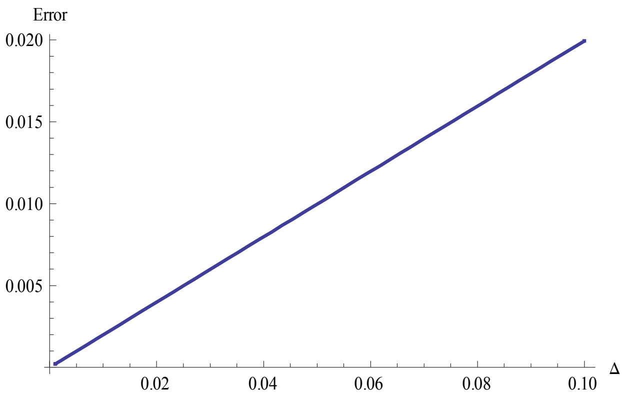
צייר גרף (ממוחשב) של השגיאה של הקרוב הנ"ל כפונקציה של Δ עבור $\Delta\in[0.001,0.1]$.

בונוס: החישוב לעיל השתמש ב"קירוב מלבנים" של האינטגרל. בצע חישוב יותר מדויק בעזרת "קירוב טרפזים". השווה את הגרפים של השגיאה כפונקציה של Δ עבור 2 השיטות.

פתרון:

הערך המדויק של האינטגרל הוא ½. ניתן לראות זאת בגלל שהפונקציה היא הצפיפות הנורמאלית והיא סימטרית סביב 0.

להלן גרף של השגיאה של קרוב המלבנים כפונקציה של Δ.



פתרון בונוס: חישוב מדויק יותר הוא בשיטת טרפזים:

$$\int_{-5}^{0} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{5/\Delta} \Delta \frac{f(-k\Delta)+f(-(k+1)\Delta)}{2}$$

כאשר מבצעים חישוב זה – השגיאה היא כמעט 0 על כל הקטע $\Delta \in [0.001, 0.1]$.

לדוגמא, ערכה המכסימלי עבור $\Delta = 0.1$, הוא בסדר גודל של 10^{-7}.

תרגיל 2: חישובי מטריצות.

1) עבור המטריצות A, B רשום את איבר מטריצת המכפלה AB:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

פתרון: $AB = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

ii) $A_{N\times N} = (a_{ij}),\ a_{ij} = i \quad B_{N\times N} = (b_{ij}), b_{ij} = j$ (רשום את האיבר הכללי של מטריצת המכפלה).

פתרון: $ab_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{N} ij = ijN$

iii) $A_{N\times N} = (a_{ij}), a_{ij} = 3^{i+j} \quad B_{N\times N} = (b_{ij}),\ b_{ij} = 1$ (רשום את האיבר הכללי של מטריצת המכפלה).

פתרון: $ab_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{N} 3^{i+k} 1 = 3^{i+1} \sum_{k=0}^{N-1} 3^{k} = 3^{i+1} \frac{3^N - 1}{2}$

iv) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (B הוא מכפלה של וקטורי עמודה ושורה).

__פתרון:__ $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$. ולכן $AB=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

2) צור 2 מטריצות בעלות מימד 20×20 בתוכנת מחשב. (הכנס למטריצות ערכים אקראיים כלשהם).
רשום את המטריצה השווה למכפלת המטריצות.

__פתרון:__

פקודות רלוונטיות ב-R:

```
➢ a=matrix(rnorm(20*20),20,20)
➢ b=matrix(rnorm(20*20),20,20)
➢ a%*%b
```

3) פתור את מערכת המשוואות

$$\begin{aligned} 5x_1+7x_2+8x_3&=3\\ 8x_1+9x_2-x_3&=6\\ 2x_1-x_3&=0\end{aligned}$$

ב 4 דרכים:

i) באמצעות הצבה (ידנית).

ii) באמצעות רישום כ $Ax=b$ ופתרון ע"י לכסון מטריצה (ידני).

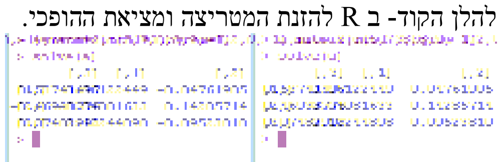
__פתרון:__

$$x_1=-\frac{5}{49},x_2=\frac{36}{49},x_3=-\frac{10}{49}$$

באמצעות מציאת המטריצה A^{-1} (אפשר בעזרת מחשב) והכפלה (אפשר בעזרת מחשב).

__פתרון:__

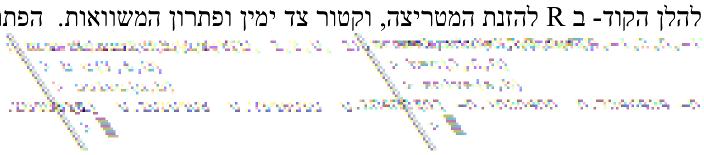
להלן הקוד- ב R להזנת המטריצה ומציאת ההופכי.



באמצעות הזנת מערכת המשוואות לתוכנת מחשב (תלוי תוכנה) ופתרון באמצעות התוכנה.

__פתרון:__

להלן הקוד- ב R להזנת המטריצה, וקטור צד ימין ופתרון המשוואות. הפתרון ניתן בכחול.



<u>תרגיל 3: משתנים מקריים בינומיים.</u>

יהיו $X_1, X_2, ..., X_n$ משתנים מקריים i.i.d המקבלים 1 בסיכוי p ו – 0 בסיכוי 1-p. יהי $N=\sum_{i=1}^{n} X_i$

(משתנה מקרי בינומי).

1) רשום את פונקצית מסת ההסתברות של N.

<u>פתרון:</u>

$$P(N=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,2,...,n$$

2) חשב את התוחלת של N ב 2 דרכים שונות:

- ע"י סיכום התוחלות של $X_1, X_2, ..., X_n$.

<u>פתרון:</u>

$$E[N]=E[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}(1\cdot p+0\cdot(1-p))=p+p+p+...+p=\underline{\underline{np}}$$

- על פי הגדרה ($E[N]=\sum_{k=0}^{n}kP(N=k)$).

<u>פתרון:</u>

$$E[N]=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P(N=k)=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=np\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}}_{1}=np$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=(p+(1-p))^{n-1}=1$$

3) חשב את השונות של N (הסבר את החישוב).

<u>פתרון:</u>

$$Var(N)=Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)\underset{independent}{\underset{\text{ב}}{=}}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p(1-p)=\underline{\underline{np(1-p)}}$$

4) יהי $N_1\sim Bin(n_1,p)$ ו - $N_2\sim Bin(n_2,p)$, כיצד מתפלג $Z=N_1+N_2$?

<u>פתרון:</u>

$Z\sim Bin(n_1+n_2,p)$ - הוא מורכב מסכום של n_1+n_2 ברנוליים.

5) יהי $N_1 \sim Bin(2, \frac{1}{2})$ ו - $N_2 \sim Bin(1, \frac{1}{4})$ צייר את פו' מסת ההסתברות של $Z = N_1 + N_2$.

<u>פתרון:</u>

כאן Z מורכב מברנולי עם סיכוי ¼ ועוד 2 ברנוליים עם סיכוי ½. לצורך מציאת ההתפלגות של Z צריך לבצע חישוב מפורט של כל האפשרויות. ראשית נראה שהערכים אשר Z יכול לקבל הינם 0,1,2,3.

$$P(Z=0) = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$$

$$P(Z=1) = \frac{1}{4}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2}) + (1-\frac{1}{4})\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{2})\frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

$$P(Z=2) = \frac{1}{4}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}(1-\frac{1}{2})\frac{1}{2} + (1-\frac{1}{4})\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

$$P(Z=3) = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$