תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם
במודלים של אמינות, מלאי ותורים

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,
תוכנית ה – .M.A עם התמחות בלוגיסטיקה,
סמסטר אביב – תשס"ח
מרצה: יוני נצרתי, עוזר הוראה: שי ישראלי.

פתרון עבודת בית מס' 1:
תהליכים סטוכסטיים ו DTMC - מבוא

גרסא 4.0

תרגיל 1: קטלוג של תהליכים סטוכסטיים.

עבור כל דוגמא של תהליך סטוכסטי ציין האם הזמן הוא בדיד או רציף ומהו מרחב המצבים – בדיד, רציף, סופי, אין-סופי (לפעמים יש יותר מתשובה אפשרית אחת).

1) מחיר מנייה במהלך יום מסחר.
זמן רציף זו ההנחה הסבירה.
מרחב מצבים גם רציף – מרחב המצבים הוא $[0,\infty)$.

2) מחיר מנייה בפתיחת כל יום מסחר.
זמן בדיד.
מרחב מצבים רציף כמו בסעיף הקודם.

3) מספר השיחות הממתינות לשרות במרכז שרות טלפוני.
זמן רציף.
מרחב מצבים בדיד - $\{0,1,2,3...\}$ **או אם יש מקום סופי** $\{0,1,2,...,N\}$.

4) כמות טלוויזיות במלאי של חנות חשמל בסוף כל יום.
זמן בדיד.
מרחב מצבים בדיד - $\{0,1,2,3...\}$ **או אם יש מקום סופי** $\{0,1,2,...,N\}$.

5) כמות חיטה במלאי בבית דגון בכל רגע.
זמן רציף.
מרחב מצבים גם רציף – מרחב המצבים הוא $[0,\infty)$ **או** $[0,L]$ **(במידה ומתחשבים בקיבולת סופית).**

6) כמות חיטה במלאי בבית דגון בסוף כל יום.
זמן בדיד.
מרחב מצבים גם רציף – מרחב המצבים הוא $[0,\infty)$ **או** $[0,L]$ **(במידה ומתחשבים בקיבולת סופית).**

תרגיל 2: תהליך סטוכסטי התלוי במשתנה מקרי יחיד

מחלקת שווק של מפעל מטריות משתמשת במודל הבא:

$$A(n) = Y \cdot Sin\left(\frac{\pi}{365}n\right)$$

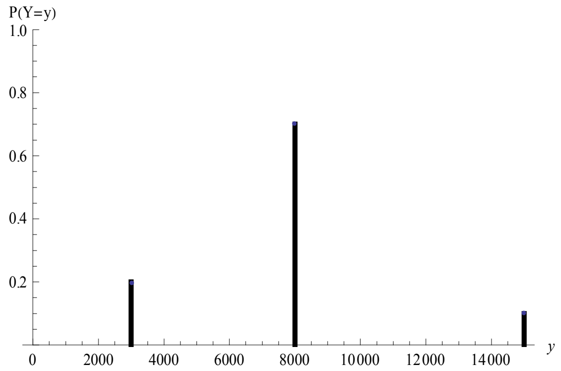
כאן n הוא היום בשנה. ו - $A(n)$ מציין את מספר המטריות הצפויות להימכר ביום ה – n.

Y הוא משתנה מקרי בעל פו' מסת ההסתברות הבאה:

$$P(Y=y)=\begin{cases}0.2 & y=3000\\ 0.7 & y=8000\\ 0.1 & y=15000\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

כאן האקראיות בתהליך אינה נובעת מהביקוש הרגעי (היום יומי) אלה מהאקראיות בשנים – שנת בצורת, שנה רגילה, שנה גשומה ביותר.

1) צייר את פו' מסת ההסתברות של Y.

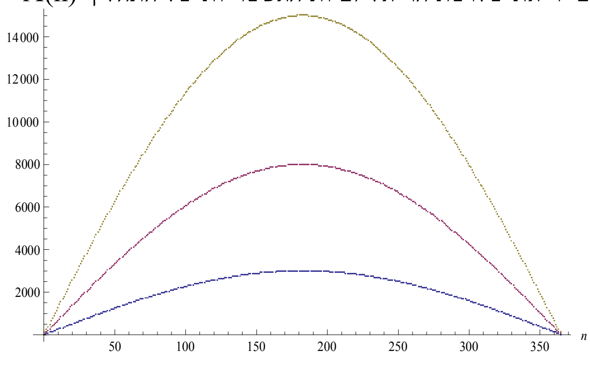


2) מהי התוחלת של Y.

$$P(Y=y)=\begin{cases}0.2 & y=3000\\ 0.7 & y=8000\\ 0.1 & y=15000\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$E[Y]=3000\cdot 0.2+8000\cdot 0.7+15000\cdot 0.1=7700$$

3) צייר את שלושת הריאליזציות האפשריות של התהליך A(n) – מומלץ להשתמש בתוכנת מחשב.



4) רשום וצייר את פו' מסת ההסתברות של $A(180)$.

המשתנה המקרי $A(180)$ **הוא** $A(180)=Y\cdot Sin\left(\frac{\pi}{365}180\right)=Y\cdot 0.9998\approx Y$ ולכן הפתרון הוא כמעט כמו זה של סעיף 1. במידה והיינו מעוניינים בערך אחר, לדוגמא, $A(29)$. אז

$$A(30)=Y\cdot Sin\left(\frac{\pi}{365}29\right)=Y\cdot 0.25$$

אם כך אז פו' מסת ההסתברות היא:

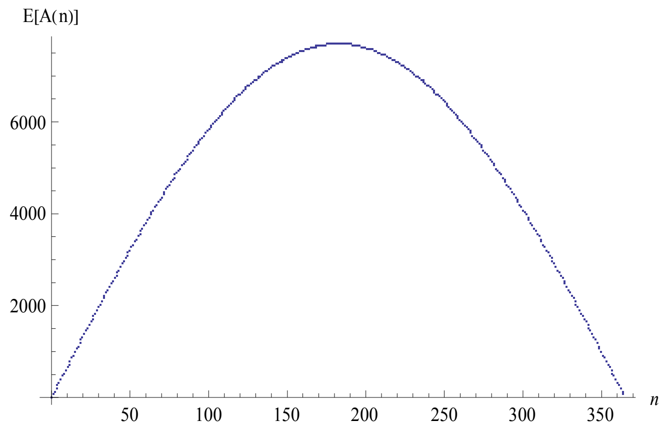
$$P(A(29)=y)=P(.25Y=y)=P(Y=4y)=\begin{cases}0.2 & y=3000/4=750\\ 0.7 & y=8000/4=2000\\ 0.1 & y=15000/4=3750\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

5) חשב את התוחלת של $A(180)$.

פתרון בדומה לסעיף הקודם ולסעיף 2.

6) צייר את פונקצית התוחלת של התהליך, ($E[A(n)]$) – מומלץ להשתמש בתוכנת מחשב.

$$E[A(n)]=E[Y\cdot Sin\left(\frac{\pi}{365}n\right)]=E[Y]Sin\left(\frac{\pi}{365}n\right)=7700Sin\left(\frac{\pi}{365}n\right)$$



<u>תרגיל 3: תהליכים סטוכסטיים מבוססים ניסויי ברנולי</u>

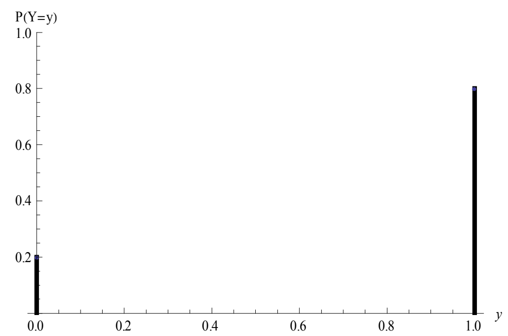
איש מכירות מטלפן לבתים בזה אחר זה בניסיון למכור מוצר.

הסיכוי שימכור מוצר בשיחת טלפון הוא 0.2 וכל שיחה בלתי תלויה באחרות.

נסמן ע"י $N_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ את מספר המכירות אשר בוצעו עד השיחה ה – n. כאשר $X_1,X_2,...$ הם סדרת משתנים i.i.d (משתנים מקריים בלתי תלויים ושווה התפלגות) .

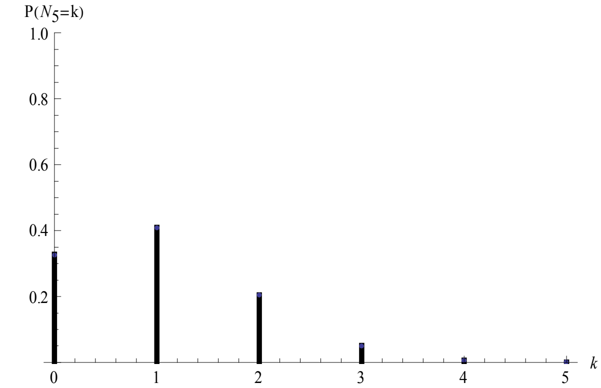
1) כיצד מתפלג X_i ?

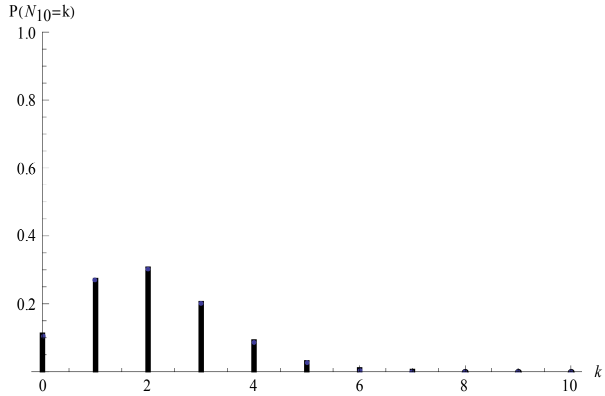
אלו משתנים מקריים ברנוליים עם פרמטר $p=0.2$: להלן ציור של פו' מסת ההסתברות שלהם:



2) כיצד מתפלג N_n ?

אלו משתנים מקריים בינומים עם פרמטרים n ו- $p=0.2$. להלן ציור של פו' מסת ההסתברות של N_{10} ו- N_5 :





3) נתאר את N_n כתהליך DTMC. נסמן

$$p_{ij}=\begin{cases}1-0.2 & j=i\\ 0.2 & j=i+1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

רשום כיצד נראית מטריצת הסתברויות המעבר – (הערה: זוהי מטריצה אין – סופית).

$$P=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2 & & & & 0\\ & 0.8 & 0.2 & & & \\ & & 0.8 & 0.2 & & \\ & & & 0.8 & 0.2 & \\ & & & & \ddots & \ddots\\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

4) להלן 2 אפשרויות ל"שדרוג" המודל:

a. הסיכוי למכור הולך וגובר עם הצלחות – בהתחלה הסיכוי למכור הוא 0.2, אבל לאחר שבוצעו i מכירות הסיכוי למכור הוא $0.2+0.8(1-\frac{1}{i})$.

b. הסיכוי למכור הולך וגובר עם שיחות הטלפון. בשיחה הראשונה הסיכוי למכור הוא 0.2, אבל לאחר שבוצעו n שיחות הסיכוי הוא $0.2+0.8(1-\frac{1}{n})$.

מי מהחלופות לעיל מהווה DTMC (רמז – הומוגניות בזמן) ומי לא? רשום את חמשת האיברים הראשונים של מטריצת הסתברויות המעבר של החלופה שהיא DTMC.

פתרון: חלופה a היא עדיין DTMC שומרת על הומגניות בזמן – יש מטריצת מעבר אחת קבועה לכל הזמן (זאת למרות שהסיכוי לשנות מצב הוא כרגע תלוי מצב). חלופה b היא כבר לא DTMC בגלל שאינה הומגנית בזמן – לא ניתן לרשום את כל חוקי המעבר במטריצה אחת אשר אינה משתנה בזמן.

להלן מטריצת המעבר של חלופה a:

$$P=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & & & & & & 0 \\ & 0.8 & 0.2 & & & & & \\ & & 0.4 & 0.6 & & & & \\ & & & 0.266 & 0.733 & & & \\ & & & & 0.2 & 0.8 & & \\ & & & & & 0.16 & 0.84 & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & & & & \end{pmatrix}$$