

תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם  
במודלים של אמינות, מלאי ותורים  
החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,  
תוכנית ה-M.A. עם התמחות בלוגיסטיקה,  
סמסטר אביב – תשס"ה  
מרצה: יוני נצרות, עוזרת הוראה: שי ישראלי.

## עבודת בית מס' 2: מידול באמצעות DTMC

גרסה 1.0

### תרגיל 1: DTMC – מטריצת המעבר ודיאגראמת מצבים

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  ומטריצת מעבר

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(1) צייר דיאגראמת מעברים בין המצבים.

(2) מצב 4 הוא "מיוחד" – באיזה מובן?

(3) נתונה התפלגות התחלתית  $a = \left( \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \right)$ . מה ההסתברות שהשרשרת תהיה אי פעם במצב 4?

(4) נתונה התפלגות התחלתית  $a = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$ . מה תוחלת הזמן (תוחלת מס' צעדים) עד אשר השרשרת אינה יותר במצב 4?

### תרגיל 2: מודל מצב מכונה - סימולציה

במפעל יש מכונה. למכונה 2 מצבים: 0 – תקול, 1 – תקין.

נתאר את מצב המכונה באמצעות DTMC בעלת מטריצת מעבר  $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$  והתפלגות התחלתית

$a = (0.0 \quad 1.0)$  (ז"א השרשרת מתחילה במצב 1 בהסתברות 1.0).

(1) בצע סימולציה של ריאליזציה בעלת 1000 צעדים.

(2) השתמש בריאליזציה לצורך אמידה של פרופורציית הזמן אשר בה המכונה במצב תקין.

רמז לביצוע הסימולציה באקסל (אבל לא חייבים לבצע באקסל – ניתן להשתמש בתוכנה לבחירתכם):

- הזנת הנוסחה  $=\text{if}(\text{rand}()<.45,1,0)$  יוצרת משתנה מקרי ברנולי עם הסתברות הצלחה 0.45. (המספר 0.45 הוא לצורך המחשה בלבד – השתמשו כאן בערכים הדרושים לצורך הסימולציה).
- לצורך אמידת פרופורציית הזמן אשר בה המכונה במצב תקין – ספרו (סכמו) את כמות המצבים אשר בהם המצב הוא 1 וחלקו ב 1000.

### תרגיל 3: מודל מוניות ואנשים

להלן מודל של תחנת מוניות:

- בתחנת המוניות יש מקום למוניות ולנוסעים.
- מספר הנוסעים המקסימאלי הוא 3.
- מספר המוניות המקסימאלי הוא 2.
- בכל דקה יש סיכוי של  $1/5$  שתגיע מונית לתחנה וסיכוי של  $4/5$  שלא תגיע מונית.
- בכל דקה יש סיכוי של  $1/3$  שיגיע נוסע לתחנה וסיכוי של  $2/3$  שלא יגיע נוסע.
- מונית המגיעה כאשר יש נוסעים בתחנה עוזבת מייד עם נוסע יחיד.
- מונית אשר מגיעה כאשר אין נוסעים בתחנה, מצטרפת לתור המוניות במידה ויש מקום (פחות מ- 2 מוניות), אחרת המונית מייד עוזבת (בלי לחפש נוסעים).
- נוסע אשר מגיע כאשר ישנה מונית בתחנה, עוזב מייד עם מונית.
- נוסע אשר מגיעה כאשר אין מוניות בתחנה, מצטרף לתור הנוסעים במידה ויש מקום, אחרת הוא מייד עוזב (בלי לחפש מוניות).
- נסמן מצב אשר בו יש  $p$  נוסעים ו-  $c$  מוניות ב-  $(p,c)$ . לדוגמא כאשר יש בתחנה 2 נוסעים ו- 0 מוניות המצב הוא  $(2,0)$ .

(1) מהם המצבים האפשריים של המערכת?  
ציין את תשובתך כקבוצת צמדים מהצורה  $(p,c)$ .  
לדוגמא:  $\{(6,3), (4,2), (0,0), (6,1)\}$ .

(2) תאר את המערכת כ DTMC: מהם מצבי המערכת? מהי מטריצת הסתברויות המעבר?