

תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם
 במודלים של אמינות, מלאי ותורים
 החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,
 תוכנית ה-M.A. עם התמחות בלוגיסטיקה,
 סמסטר אביב – תשס"ה
 מרצה: יוני נצרות, עוזרת הוראה: שי ישראלי.

פתרון עבודת בית מס' 2: מידול באמצעות DTMC

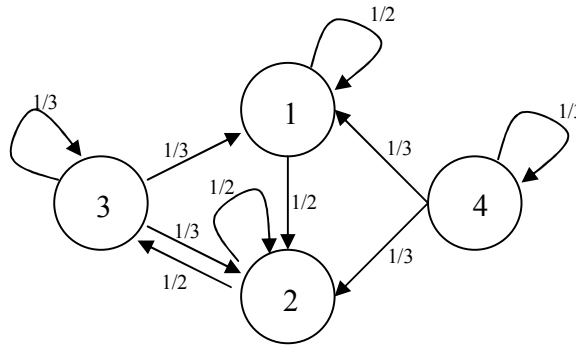
גרסא 1.0

תרגיל 1: DTMC – מטריצת המעבר ודיאגראמת מצבים

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ומטריצת מעבר

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(1) צייר דיאגראמת מעברים בין המצבים.



(2) מצב 4 הוא "מיוחד" – באיזה מובן?

נשים לב שאין חצים הנכנסים למצב 4. באופן שקול במטריצת המעבר, העמודה של מצב 4 היא כולה אפסים פרט לאיבר האלכסון. המשמעות היא שלא ניתן להיכנס למצב 4 אלא רק לצאת ממנו. המשמעות היא שאם הריאליזציה לא התחילה במצב 4 היא לעולם לא תבקר במצב זה.

(3) נתונה התפלגות התחלתית $a = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. מה ההסתברות שהשרשרת תהייה אי פעם במצב 4?

התפלגות התחלתית זו אומר ש $P(X_0 = 4) = 0$ ולכן בהמשך לפתרון של הסעיף הקודם $P(X_n = 4 \text{ for some } n) = 0$.

4) נתונה התפלגות התחלתית $a = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$. מה תוחלת הזמן (תוחלת מס' צעדים) עד אשר השרשרת אינה יותר במצב 24?

כאשר $P(X_0 = 4) = 1$. אז בסיכוי $1/3$ גם, $X_1 = 1$ ובמידה וזה קרה אז בסיכוי $1/3$ אז $X_2 = 1$ וכן הלאה. ניתן לראות את התנהגות השרשרת כאן (עד שיוצאים ממצב 4) כאוסף ניסויי ברנולי בלתי תלויים. נתייחס ל'הצלחה' כיצאה ממצב 4 (הסיכוי להצלחה הוא $2/3$). נתייחס ל'כישלון' כהשארות במצב 4 (הסיכוי לכישלון הוא $1/3$).

אם כך, מספר הניסיונות עד להצלחה הוא משתנה מקרי גיאומטרי עם פרמטר סיכוי להצלחה $= 2/3$. פו' מסת ההסתברות של משתנה מקרי זה היא

$$P(Z = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$E[Z] = \frac{3}{2} \text{ והתוחלת היא } \frac{3}{2}$$

תרגיל 2: מודל מצב מכונה- סימולציה

פתרון: ראו קובץ אקסל מצורף.

תרגיל 3: מודל מוניות ואנשים

רעיון לפתרון: שאלה זו דומה למודל הייצור אשר נלמד בכתה – יחידה 3 סעיף 2.

צריך להבחין שברגע נתון לא יהיו בתחנה נוסעים ומוניות במקביל.

1) מהם המצבים האפשריים של המערכת?

$$\{(3, 0), (2, 0), (1, 0), (0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$$

2) תאר את המערכת כ DTMC: מהם מצבי המערכת? מהי מטריצת הסתברויות המעבר?

ניתן לשמור את השמות של מצבי המערכת $\{(3, 0), (2, 0), (1, 0), (0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$ אבל לצורך

הפשטות נשתמש בערכים $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ כאשר -3 הוא המצב $(3, 0)$ ו 2 הוא המצב

$(0, 2)$ וכו'.

אז מטריצת הסתברויות המעבר היא:

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/15 & 9/15 & 2/15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/15 & 9/15 & 2/15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/15 & 9/15 & 2/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/15 & 9/15 & 2/15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$