תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם
במודלים של אמינות, מלאי ותורים

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,
תוכנית ה – .M.A עם התמחות בלוגיסטיקה,
סמסטר אביב – תשס"ח
מרצה: יוני נצרתי, עוזר הוראה: שי ישראלי.

פתרון עבודת בית מס' 3:
חישובים הקשורים ל-DTMC

גרסא 1.0

תרגיל 1: דוגמת יצור

בתרגיל זה נשתמש בדוגמת הייצור (יחידה 3.2).

1) קראו את דוגמא 5.13 בספר (ע"מ 121). בדוגמא זו מחושבים הגדלים: $p_{0,0}{}^{(8)}$ ו - $p_{0,-2}{}^{(8)}$. האם לפי דעתכם המטריצה $P^{(8)}$ היא בעלת אפסים או שכולה אינה אפסים (במידה ואתם לא בטוחים בדקו באופן מפורש).

פתרון:

ללא חישוב P^8 ניתן לדעת שאין במטריצה אפסים. הסיבה: יש סיכוי חיובי לעבור מכל מצב לכל מצב אחר ב – 4 צעדים (המקרים הקיצוניים הם מצבים 2- , 2). ז"א שכבר במטריצה $P^{(4)} = P^4$ לא יהיו אפסים. באופן דומה, כעבור 8 צעדים יש סיכוי לעבור מכל מצב לכל מצב אחר.

למי שחישב את P^8 באופן מפורש להלן ערך המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 0.00966853 & 0.957511 & 0.0323359 & 0.000483038 & 1.73106\times10^{-6} \\ 0.00962347 & 0.953093 & 0.0366416 & 0.000639187 & 2.40645\times10^{-6} \\ 0.000653266 & 0.0736533 & 0.88938 & 0.0361544 & 0.000159231 \\ 0.0000196158 & 0.00258264 & 0.0726739 & 0.920102 & 0.00462179 \\ 0.0000141304 & 0.00195448 & 0.0643374 & 0.929027 & 0.00466685 \end{pmatrix}$$

2) חשבו את $p_{-2,2}{}^{(2)}$.

פתרון:

ניתן כמובן לחשב את המטריצה $P^{(2)} = P \cdot P$ אבל נחשב את הערך הרצוי בלבד:
צריך להכפיל את השורה הראשונה (2-) בעמודה האחרונה (2).

$p_{-2,2}{}^{(2)} = .0100\cdot 0 + .9900\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot .00495 + 0\cdot .0050 = 0$.

למעשה ברור שהפתרון הוא 0, הרי לא ניתן לעבור ב – 2 צעדים ממצב 2- למצב 2 (דרושים לפחות 4 צעדים).

3) מצאו את ההתפלגות הסטציונרית באמצעות קרוב של $P^{(\infty)}$, חשבו $P^{(n)}$ עבור n גדול.

פתרון:

צריך להעלות את המטריצה P בחזקה גבוהה (לבצע הרבה הכפלות). במקרה של מטריצה זו, דרוש n יחסית גדול לצורך קבלת התכנסות עד דיוק של נאמר 0.001. הסיבה היא שהערכים באלכסון מאוד קרוב לאחד. לדוגמא: $P_{0,0} = 0.9851$. כתוצאה מכך, כאשר השרשרת במצב 0, אז תוחלת מספר הצעדים עד שעוזבים את מצב 0 היא: $\frac{1}{1-0.9851} = 67.11$ צעדים! אם כך השרשרת מטיילת בין המצבים בקצב יחסית איתי ולכן דרוש הרבה זמן עד שתתכנס למצב יציב.

שימו לב שדוגמא זו אינה טיפוסית.

להלן תוצאת חישוב Mathematica:

```
In[22]:= Round[MatrixPower[P, 1500], .001] // MatrixForm
Out[22]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.006 & 0.569 & 0.283 & 0.141 & 0.001 \\ 0.006 & 0.569 & 0.283 & 0.141 & 0.001 \\ 0.006 & 0.569 & 0.283 & 0.141 & 0.001 \\ 0.006 & 0.569 & 0.283 & 0.141 & 0.001 \\ 0.006 & 0.569 & 0.283 & 0.141 & 0.001 \end{pmatrix}$$

אם כך קיבלנו:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{-2} & \pi_{-1} & \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .006 & .569 & .283 & .141 & .001 \end{pmatrix}$$

4) **בונוס:** בדקו את סעיף 3 באמצעות פתרון משוואות שווי משקל. (הציגו את החישובים או פקודות המחשב).

<u>פתרון:</u>

להלן משוואות שווי משקל:

$$\begin{pmatrix} \pi_{-2} & \pi_{-1} & \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & P & & \\ & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{-2} & \pi_{-1} & \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{-2} + \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

נסמן את ערכי P באמצעות p_{ij} פרט למקרים בהם יש אפסים. נשתמש ב – 4 מתוך 5 המשוואות הראשונות ובמשוואת הסכום שווה לאחד (נוח לבחור משוואות עם כמה שיותר אפסים אז נשתמש בראשונה ובאחרונה).

$$\begin{aligned} &\pi_{-2}p_{-2,-2} + \pi_{-1}p_{-1,-2} = \pi_{-2} \\ &\pi_{-2}p_{-2,-1} + \pi_{-1}p_{-1,-1} + \pi_0 p_{0,-1} = \pi_{-1} \\ &\pi_{-1}p_{-1,0} + \pi_0 p_{0,0} + \pi_1 p_{1,0} = \pi_0 \\ &\pi_1 p_{1,2} + \pi_2 p_{2,2} = \pi_2 \\ &\pi_{-2} + \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{aligned}$$

או בכתיבה אחרת:

$$\begin{aligned} &\pi_{-2}(p_{-2,-2} - 1) + \pi_{-1}p_{-1,-2} = 0 \\ &\pi_{-2}p_{-2,-1} + \pi_{-1}(p_{-1,-1} - 1) + \pi_0 p_{0,-1} = 0 \\ &\pi_{-1}p_{-1,0} + \pi_0(p_{0,0} - 1) + \pi_1 p_{1,0} = 0 \\ &\pi_1 p_{1,2} + \pi_2(p_{2,2} - 1) = 0 \\ &\pi_{-2} + \pi_{-1} + \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{aligned}$$

להלן הפתרון של מערכת המשוואות (היא מוצגת בצורה הסטנדרטית: $Ax = b$):

```
In[42]:= A = ( .01 - 1   .00995      0         0        0
               .99     .9851 - 1   .00995     0        0
               0       .00495    .9851 - 1  .00995     0
               0         0          0       .00495  .005 - 1
               1         1          1         1        1     );

x = {{x1}, {x2}, {x3}, {x4}, {x5}};
b = {{0}, {0}, {0}, {0}, {1}};
Flatten[Round[x /. Solve[A.x == b, Flatten[x]], .001] ] // MatrixForm

Out[45]//MatrixForm=
0.006
0.569
0.283
0.141
0.001
```

תרגיל 2: מודל מצב מכונה – המשך.

תרגיל זה משלים את תרגיל 2 של עבודת הבית הקודמת. בתרגיל ההוא ביצעתם סימולציה של המודל הבא:

במפעל יש מכונה. למכונה 2 מצבים: 0 – תקול, 1 – תקין.
נתאר את מצב המכונה באמצעות DTMC בעלת מטריצת מעבר $P=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\ 1/4 & 3/4\end{pmatrix}$ והתפלגות התחלתית
$a=\begin{pmatrix}0.0 & 1.0\end{pmatrix}$ (ז"א השרשרת מתחילה במצב 1 בהסתברות 1.0).

1) פתרו את משוואות שווי המשקל (מצאו את $\begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1\end{pmatrix}$).

פתרון:

$$\pi_0\frac{2}{3}+\pi_1\frac{1}{4}=\pi_0$$
$$\pi_0+\pi_1=1$$

אז: $\pi=\begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}.43 & .57\end{pmatrix}$

2) האם הפתרון מתאים לתוצאות הסימולציה של התרגיל הקודם – הסבירו.

פתרון:

תוצאת הסימולציה צריכה להתכנס ל – 0.57. כמובן שזה רק אמד. ככל שנגדיל את אורך הסימולציה האמד יתקרב לערך הדרוש.

3) חשבו את $a^{(3)}=\begin{pmatrix}a_0^{(3)} & a_1^{(3)}\end{pmatrix}$ (הפילוג השולי של התהליך בזמן 3).

פתרון:

$$a^{(3)}=\begin{pmatrix}a_0^{(3)} & a_1^{(3)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\ 1/4 & 3/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\ 1/4 & 3/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\ 1/4 & 3/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}.398 & .602\end{pmatrix}$$

4) האם ניתן לאמת את תוצאת 3 על פי תוצאות ריצת סימולציה 1 (ריאליזציה 1) או האם דרושים הרבה ריאליזציות – הסבירו בקצרה.

פתרון:

לא – דרושים הרבה ריצות למשך של 3 צעדים.

5) **בונוס:** אמתו את תוצאת 3 באמצעות סימולציה או סימולציות.

פתרון:

דרך פתרון: לבצע כ – 1000 ריצות של 3 צעדים ואמוד את ההתפלגות השולית בסיום כל ריצה קצרה כזאת ע"י פרופורציה.