

תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם
במודלים של אמינות, מלאי ותורים
החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,
תוכנית ה-M.A. עם התמחות בלוגיסטיקה,
סמסטר אביב – תשס"ה
מרצה: יוני נצרותי, עוזרת הוראה: שי ישראלי.

פתרון עבודת בית מס' 4: סיכום DTMC (תרגיל בודד)

גרסא 1.0

לקבלן בניין יש טרקטור.

הטרקטור יכול להיות:

- פעיל בעבודות בנייה.
- לא פעיל.

נתונים נוספים:

- כאשר הטרקטור תקין אבל אינו פעיל אז יש סיכוי של $\frac{1}{2}$ שיועסק למחרת בבניה וסיכוי של $\frac{1}{2}$ שיישאר לנוח למחרת.
- כאשר טרקטור מתחיל עבודות בנייה הוא מועסק לתקופה של שלושה ימים בדיוק.

(1) תארו את מצב הטרקטור כ- DTMC, כאשר משמעות הזמן היא ימים. מהו מרחב המצבים? מהי מטריצת המעבר.

פתרון:

את סיפור השאלה ניתן אולי לפרש בשתי דרכים – למעשה הסיפור אינו ממש מוגדר היטב.

דרך א': לאחר שהטרקטור היה פעיל לתקופה של 3 ימים הוא תמיד חוזר ליום מנוחה.

דרך ב': לאחר שהטרקטור הוא פעיל לתקופה של 3 ימים אז יש סיכוי של $\frac{1}{2}$ שינוח למחרת וסיכוי של $\frac{1}{2}$ שיכנס מיד (למחרת) לעוד תקופה של שלושה ימים.

מצבים: $S = \{0, 1, 2, 3\}$

0 – הטרקטור אינו פעיל.

1 – הטרקטור פעיל ביום הראשון.

2 – הטרקטור פעיל ביום השני.

3 – הטרקטור פעיל ביום השלישי.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{מטריצת מעבר עבור דרך א':}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{מטריצת מעבר עבור דרך ב':}$$

(2) הניחו שבזמן 0, הטרקטור אינו פעיל. מה הסיכוי שבזמן 5 הטרקטור אינו פעיל?

פתרון:

$$P^5 = \begin{pmatrix} 17/32 & 9/32 & 1/16 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 9/16 & 1/16 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix} \text{עבור מטריצה א': מקבלים}$$

.17/32 . אז התשובה היא

$$P^5 = \begin{pmatrix} 9/32 & 9/32 & 5/16 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 5/16 & 5/16 & 1/8 & 1/4 \\ 9/32 & 9/32 & 5/16 & 1/8 \end{pmatrix} \text{עבור מטריצה ב': מקבלים}$$

.9/32 . אז התשובה היא

בנוסף: פתרו לא באמצעות P^n .

פתרון (עבור מטריצה א'): בשביל להיות לא פעיל בזמן 5 יכולים להיות 2 דברים:

$$\text{דבר אחד} - \text{הטרקטור לא נכנס לפעילות בכלל (במהלך חמשת הימים): } (1/2)^5 = \frac{1}{32}$$

דבר שני – הטרקטור נכנס לפעילות של תקופה אחת (ואז לא היה פעיל). כאן ייתכן שהטרקטור נכנס לפעילות מייד ולאחר הפעילות לא היה פעיל ליום או שהטרקטור נכנס לפעילות לאחר יום. הסיכוי של כל אחד מהמקרים הללו

$$\text{הוא } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ ולכן הסיכוי הכולל (סכום של מאורעות זרים) עבור "דבר שני" הוא } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ולכן סה"כ דבר ראשון + דבר שני שווה ל } \frac{17}{32}$$

$$\text{עבור מטריצה ב': מקבלים באופן דומה } \frac{9}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

3) לאחר מספר ימים (n מספיק גדול), מהי פרופורציית הזמן שבה הטרקטור אינו פעיל? הערה: ניתן לפתור את משוואות שווי משקל יחסית בקלות (בחישוב ידני).

פתרון:

להלן משוואות שווי משקל (עבור מטריצה א'):

$$(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

או בכתיבת משוואות:

$$\frac{1}{2}\pi_0 + \pi_3 = \pi_0$$

$$\frac{1}{2}\pi_0 = \pi_1$$

$$\pi_1 = \pi_2$$

$$\pi_2 = \pi_3$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

(תראו כמה הגיוניות המשוואות – תחשבו על זה).

נזרוק עכשיו את המשוואה הראשונה ונציב את המשוואות במשוואה הרביעית:

$$2\pi_1 + \pi_1 + \pi_1 + \pi_1 = 1 \text{ מכאן } \pi_1 = \frac{1}{5} \text{ ולכן:}$$

$$(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) = \left(\frac{2}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5}\right)$$

עבור מקרה ב': להלן הפתרון הסופי בלבד (פותרים כמוכן באותה דרך):

או בדרך מקוצרת: רואים מהמטריצה ש - $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$ ולכן:

$$\pi_0 + 3\pi_1 = 1$$

בנוסף (מהמשוואה הראשונה) - $\frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 = \pi_0$ או $\pi_0 = \pi_1$ ולכן מקבלים פילוג אחיד!

$$(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}\right)$$

הערה: פילוג אחיד – מתקבל תמיד כאשר סכום העמודות הוא 1.

קבלן הבניין מרוויח 1500 ₪ ליום עבור ימים אשר בהם הטרקטור פעיל ומפסיד 500 ₪ בימים אשר בהם הטרקטור אינו פעיל. מהי תוחלת הרווח היומית? (במצב יציב).

עבור דרך א':

$$-500 \cdot \frac{2}{5} + 1500 \cdot \frac{3}{5} = 700$$

תוחלת רווח יומית :

עבור דרך ב':

$$-500 \cdot \frac{1}{4} + 1500 \cdot \frac{3}{4} = 1000$$

תוחלת רווח יומית :