

תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם  
 במודלים של אמינות, מלאי ותורים  
 החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,  
 תוכנית ה- M.A. עם התמחות בלוגיסטיקה,  
 סמסטר אביב – תשס"ה  
 מרצה: יוני נצרותי, עוזר הוראה: שי ישראלי.

## פתרון עבודת בית מס' 5:

### CTMC

גרסה 1.0

#### תרגיל 1: התפלגות אקספוננציאלית.

(א) צייר גרפים (באמצעות תוכנת מחשב) של פונקציית הצפיפות של המשתנים המקריים:

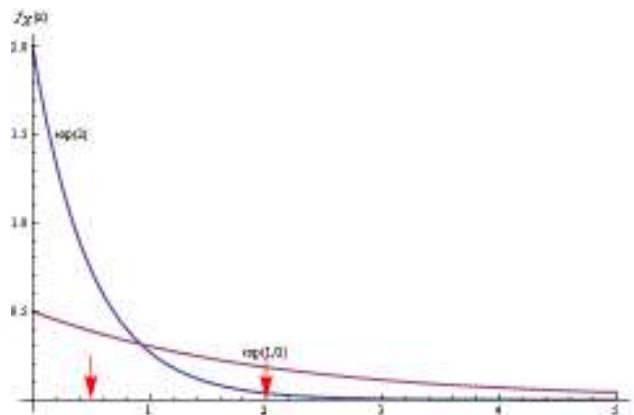
$$X_1 \sim \exp(2)$$

$$X_2 \sim \exp(1/2)$$

(ב) מהי התוחלת של המשתנים המקריים לעיל, סמן זאת על הגרף.

#### פתרון:

התוחלות הן  $E[X_1] = 1/2$  ,  $E[X_2] = 2$  (מסומנות על הגרף):



(ג) כעת הנח ש  $X_1$  ו-  $X_2$  בלתי תלויים. כיצד מתפלג המינימום של  $X_1$  ו-  $X_2$ ? מה תוחלת המינימום.

#### פתרון:

$$Min(X_1, X_2) \sim \exp(2 + 1/2)$$

$$E[Min(X_1, X_2)] = \frac{2}{5}$$

(ד) בהשםך לסעיף הקודם (הנחת האי-תלות). מהי  $P(X_1 < X_2)$ ?

#### פתרון:

$$P(X_1 < X_2) = \frac{2}{2 + 1/2} = \frac{4}{5}$$

(ה) בדוק את תשובתך לסעיף ד' באמצעות סימולציית מחשב.

הנחיה: הגרל 10000 זוגות של משתנים מקריים  $X_1, X_2$  וספור בכמה מהזוגות מתקיים  $X_1 < X_2$ . לצורך הגרלת משתנה מקרי  $\exp(\lambda)$  השתמש בעובדה הבאה:

כאשר  $Y \sim Unifrom(0,1)$  אז  $-\frac{1}{\lambda} \ln(Y)$  מתפלג  $\exp(\lambda)$ .

**פתרון:**

ראו קובץ אקסל מצורף.

### תרגיל 2: CTMC של סדנת מכונות

בתרגיל זה התייחס לדוגמא 6.7 בע"מ 164 בספר (סעיף 8.3 בתוכנית הלימוד). דוגמא זו דנה בסדנת מכונות עם  $N$  מכונות ו- $M$  אנשי תיקון.

הנח שמספר המכונות הוא 6 ומספר אנשי התיקון הוא 2. בנוסף הנח שתוחלת זמן תיקון מכונה היא שעה ותוחלת הזמן עד לקלקול מכונה היא 3 שעות.

(א) כתוב מפורש את מטריצת הקצבים  $R$ .

**פתרון:**

המצבים הם  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (התהליך מתאר את מס' המכונות התקינות).

$$R = \begin{pmatrix} - & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & - & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & - & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/3 & - & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & - & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/3 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/3 & - \end{pmatrix}$$

(ב) כאת הנח שכאשר מכונה אחת מקולקלת בלבד, 2 אנשי התיקון עובדים עליה במקביל ואז זמן התיקון הוא בעל תוחלת של  $2/3$  שעה (ועדיין בעל פילוג אקספוננציאלי). כיצד משתנה תשובתך לסעיף הקודם?

$$R = \begin{pmatrix} - & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & - & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & - & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/3 & - & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & - & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/3 & - & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/3 & - \end{pmatrix}$$

### תרגיל 3: CTMC של שווק

חברת שווק יוגורט טבעי מייצרת יוגורט ב 3 טעמים:  $\{1, 2, 3\}$ . מנהל השווק של החברה ממדל את העדפות "צרכן טיפוסי" באמצעות CTMC  $X_t$  המתאר מהו הטעם המועדף על צרכן בזמן  $t$ .

מנהל השווק מניח:  
לאחר התקופה שבה צרכן העדיף את סוג מס' 1, הוא מעדיף את סוג מס' 2 תמיד. לאחר התקופה שבה צרכן העדיף את סוג 2 אז הוא מעדיף את סוג 3 תמיד. לאחר התקופה שבה צרכן העדיף את סוג 3 אז יש סיכוי של 20% שיעדיף את סוג 1 ו 80% שיעדיף את סוג 2.  
בנוסף נתון שתוחלת זמן ההעדפה של כל סוג היא יחידת זמן אחת וזמן ההעדפה הוא בעל התפלגות אקספוננציאלית.

(א) תאר את מטריצת המעבר המשוכנת (P) המתאימה ל CTMC זה.  
**פתרון:**

מרחב המצבים הוא  $S = \{1, 2, 3\}$ .

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ .2 & .8 & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) תאר את דיאגראמת (ומטריצת) הקצבים.  
**פתרון:**

$$R = \begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ .2 & .8 & - \end{pmatrix}$$

הערה במקרה יצא כאן שמטריצת הקצבים היא כמו המטריצה המשוכנת. במידה והיה נתון שזמן השהייה

במצב הוא מ"מ אקספ' בעל תוחלת  $\frac{1}{\lambda}$  אז הפתרון היה:  $R = \begin{pmatrix} - & 1\lambda & 0 \\ 0 & - & 1\lambda \\ .2\lambda & .8\lambda & - \end{pmatrix}$

ג) כעת נתון שמשך ההעדפה של כל סוג אינו אקספוננציאלי אלא בעל התפלגות בעלת פונקציית צפיפות:  
 $f_X(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$ . זוהי פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי  $\text{Gamma}(2, \lambda)$ , היא מתקבלת ע"י התפלגות סכום של 2 משתנים מקריים  $\exp(\lambda)$  בלתי תלויים).  
 תאר עכשיו את  $X_t$  כ CTMC (שים לב שמרחב המצבים כבר אינו  $\{1, 2, 3\}$ ).

**פתרון:**

נגדיר מצבים:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

מצבים 1,2 מתארים העדפה של סוג 1 כאשר מצב 1 מתאר שהייה בשלב האקספוננציאלי הראשון ומצב 2 מתאר שהייה בשלב השני.

באופן דומה מצבים 3,4 מתארים סוג 2, ומצבים 5,6 מתארים את סוג 3.  
 להלן מטריצת הקצבים:

$$R = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ .2\lambda & 0 & .8\lambda & 0 & 0 & - \end{pmatrix}$$

שימו לב שכאשר מסיימים העדפה מסוג 3 (מצב 6 – שלב שני) אז עוברים לשלב הראשון של העדפה מסוג 1 או 2.