

תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם
במודלים של אמינות, מלאי ותורים
החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,
תוכנית ה-M.A. עם התמחות בלוגיסטיקה,
סמסטר אביב – תשס"ה
מרצה: יוני נצרותי, עוזר הוראה: שי ישראלי.

עבודת בית מס' 5:

CTMC

גרסה 1.0

תרגיל 1: התפלגות אקספוננציאלית.

(א) צייר גרפים (באמצעות תוכנת מחשב) של פונקציית הצפיפות של המשתנים המקריים:

$$X_1 \sim \exp(2)$$

$$X_2 \sim \exp(1/2)$$

(ב) מהי התוחלת של המשתנים המקריים לעיל, סמן זאת על הגרף.

(ג) כעת הנח ש X_1 ו- X_2 בלתי תלויים. כיצד מתפלג המינימום של X_1 ו- X_2 ? מה תוחלת המינימום.

(ד) בהשמך לסעיף הקודם (הנחת האי-תלות). מהי $P(X_1 < X_2)$?

(ה) בדוק את תשובתך לסעיף ד' באמצעות סימולציית מחשב.

הנחייה: הגרל 10000 זוגות של משתנים מקריים X_1, X_2 וספור בכמה מהזוגות מתקיים $X_1 < X_2$. לצורך הגרלת משתנה מקרי $\exp(\lambda)$ השתמש בעובדה הבאה:

כאשר $Y \sim Unifrom(0,1)$ אז $-\frac{1}{\lambda} \ln(Y)$ מתפלג $\exp(\lambda)$.

תרגיל 2: CTMC של סדנת מכונות

בתרגיל זה התייחס לדוגמא 6.7 בע"מ 164 בספר (סעיף 8.3 בתוכנית הלימוד).
דוגמא זו דנה בסדנת מכונות עם N מכונות ו- M אנשי תיקון.

הנח שמספר המכונות הוא 6 ומספר אנשי התיקון הוא 2.

בנוסף הנח שתוחלת זמן תיקון מכונה היא שעה ותוחלת הזמן עד לקלקול מכונה היא 3 שעות.

(א) כתוב מפורש את מטריצת הקצבים R .

(ב) כאת הנח שכאשר מכונה אחת מקולקלת בלבד, 2 אנשי התיקון עובדים עליה במקביל ואז זמן התיקון הוא בעל תוחלת של $2/3$ שעה (ועדיין בעל פילוג אקספוננציאלי). כיצד משתנה תשובתך לסעיף הקודם?

תרגיל 2: CTMC של שווק

חברת שווק יוגורט טבעי מייצרת יוגורט ב 3 טעמים: $\{1, 2, 3\}$. מנהל השווק של החברה ממדל את העדפות "צרכן טיפוסי" באמצעות CTMC X_t המתאר מהו הטעם המועדף על צרכן בזמן t .

מנהל השווק מניח:
לאחר התקופה שבה צרכן העדיף את סוג מס' 1, הוא מעדיף את סוג מס' 2 תמיד. לאחר התקופה שבה צרכן העדיף את סוג 2 אז הוא מעדיף את סוג 3 תמיד. לאחר התקופה שבה צרכן העדיף את סוג 3 אז יש סיכוי של 20% שיעדיף את סוג 1 ו 80% שיעדיף את סוג 2.
בנוסף נתון שתוחלת זמן ההעדפה של כל סוג היא יחידת זמן אחת וזמן ההעדפה הוא בעל התפלגות אקספוננציאלית.

- (א) תאר את מטריצת המעבר המשוכנת (P) המטעימה ל CTMC זה.
(ב) תאר את דיאגראמת (ומטריצת) הקצבים.
(ג) כעת נתון שמשך ההעדפה של כל סוג אינו אקספוננציאלי אלה בעל התפלגות בעלת פונקצית צפיפות:
 $f_X(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$. (זוהי פונקצית הצפיפות של משתנה מקרי $\text{Gamma}(2, \lambda)$, היא מתקבלת ע"י התפלגות סכום של 2 משתנים מקריים $\exp(\lambda)$ בלתי תלויים).
תאר עכשיו את X_t כ CTMC (שים לב שמרחב המצבים כבר אינו $\{1, 2, 3\}$).