

תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם  
 במודלים של אמינות, מלאי ותורים  
 החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,  
 תוכנית ה- M.A. עם התמחות בלוגיסטיקה,  
 סמסטר אביב – תשס"ה  
 מרצה: יוני נצרת.

## פתרון לעבודת בית מס' 6: CTMC - המשך

גרסא 1.0

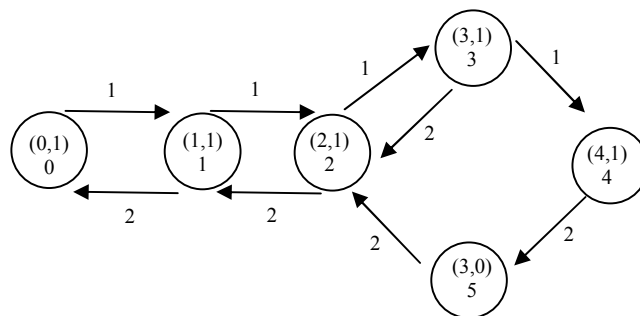
### תרגיל 1:

התייחסו לדוגמא 6.15 (סעיף לימוד 10.6) בעמוד 173-174 בספר.

- (1) ציירו את דיאגרמת הקצבים עבור  $k = 2$ ,  $K = 4$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ .
- (2) רשמו את הקצבים במטריצת גנרטור,  $Q$ . שימו לב – לצורך הנוחות התאימו לכל מצב מס' טבעי הישמש כאינדקס למטריצה.
- (3) רשמו את משוואות שווי משקל.
- (4) נתון:
  - a. עלות החזקת יחידה אחת במלאי היא 2 ש"ח לשעה.
  - b. בכל שעה אשר בה המכונה עובדת העלות היא 2 ש"ח.
  - c. הרווח מכל מוצר אשר נמכר הוא 10 ש"ח.
- (5) **בונים:** פתרו את משוואות שווי משקל. וחשבו באופן מספרי את התוצאה של הסעיף הקודם.

### פתרון:

(1)



(2)

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) משוואות שווי משקל:

$$\pi_0 = 2\pi_1$$

$$3\pi_1 = \pi_0 + 2\pi_2$$

$$3\pi_2 = \pi_1 + 2\pi_3 + 2\pi_5$$

$$3\pi_3 = \pi_2$$

$$2\pi_4 = \pi_3$$

$$2\pi_5 = 2\pi_4$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$$

(4) על פי נתוני השאלה, להלן קצב העלות עבור כל מצב:

$$c(0) = 0 \cdot 2 + 2 - 0 = 2$$

$$c(1) = 1 \cdot 2 + 2 - 10 \cdot 1 = -6$$

$$c(2) = 2 \cdot 2 + 2 - 10 \cdot 1 = -4$$

$$c(3) = 3 \cdot 2 + 2 - 10 \cdot 1 = -2$$

$$c(4) = 4 \cdot 2 + 0 - 10 \cdot 1 = -2$$

$$c(5) = 3 \cdot 2 + 0 - 10 \cdot 1 = -4$$

המחובר הראשון הוא עבור אחזקת מוצרים, המחבר השני הוא עבור עבודה של המכונה, המחבר השלישי הוא עבור מוצרים אשר נמכרים. להלן הסבר עבור המחבר השלישי: מרוויחים 10 שקלים עבור כל מוצר שנמכר. מוצרים נמכרים במצבים 1,2,3,4,5 (לא נמכרים במצב 0). וקצב מכירת המוצרים הוא  $\lambda = 1$ . אז מרוויחים ממכירה ליחידת זמן (שעה)  $10 \cdot 1$ .

תוחלת העלות לשעה היא:

$$\sum_{i=0}^5 \pi_i c(i)$$

(6) פתרון משוואות שווי משקל:

$$\pi = \left( \frac{24}{46} \quad \frac{12}{46} \quad \frac{6}{46} \quad \frac{2}{46} \quad \frac{2}{46} \quad \frac{2}{46} \right) \quad \text{ולכן} \quad \sum_{i=0}^5 \pi_i c(i) = -\frac{29}{23} \quad (\text{שימו לב שזה עלות, ז"א רווח שלילי}).$$

## תרגיל 2:

נתונה CTMC בעלת מרחב מצבים  $S = \{1, 2, 3\}$  ומטריצת מעבר משוכנת:

$$P = \begin{pmatrix} ? & ? & .5 \\ .2 & ? & ? \\ .3 & ? & ? \end{pmatrix} \quad (\text{השלימו את סימני השאלה}).$$

נתון שתוחלת זמן השהייה במצב  $i$  היא  $i$ . (לדוגמא: תוחלת זמן השהייה במצב 2 היא 2 יחידות זמן).

**פתרון:**

ראשית נשלים את סימני השאלה:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & .5 & .5 \\ .2 & 0 & .8 \\ .3 & .7 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) רשמו את מטריצת הגנראטור.

**פתרון:**

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & .5 & .5 \\ .1 & -.5 & .4 \\ .1 & .233 & -.333 \end{pmatrix}$$

(2) רשמו ופתרו את משוואות שווי משקל.

**פתרון:**

$$\pi_1 = .1\pi_2 + .1\pi_3$$

$$.5\pi_2 = .5\pi_1 + .233\pi_3$$

$$.33\pi_3 = .5\pi_1 + .4\pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

הפתרון של המשוואות הוא  $\pi = (.091 \quad .351 \quad .558)$ .

פתרו את משוואות שווי משקל המתאימות לשרשרת המשוכנת – הסבירו מדוע הפתרון אשר התקבל אינו שווה לפתרון של סעיף 2.

**פתרון:**

$$\pi_1 = .2\pi_2 + .3\pi_3$$

$$\pi_2 = .5\pi_1 + .7\pi_3$$

$$\pi_3 = .5\pi_1 + .8\pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

הפתרון של המשוואות הוא  $\pi = (.201 \quad .388 \quad .411)$ .

פתרון משוואות שווי משקל זה (של השרשרת המשוכנת) מתאר את פרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת בכל מצב רק ברגעי מעבר, פרופורציה זו מתבססת על מטריצת המעבר בלבד ואינה לוקחת בחשבון את זמני השהייה בכל מצב. לכן הערכים אשר התקבלו בסעיף זה אינם שווים לערכים של הסעיף הקודם.

(3) **בנוסף:** הניחו שתוחלת זמן השהייה במצב  $i$  היא 23.5 (זהו עבור שלושת המצבים) – כיצד תשתנה

תשובתכם לסעיף הקודם?

כאשר תוחלת זמן השהייה בכל מצב שווה – אז פרופורציית הזמן אשר שוהים בכל מצב (בזמן רציף) שווה לפרופורציית זמן השהייה בכל מצב ברגעי מעבר. במקרה זה פתרון משוואות שווי משקל של המטריצה המשוכנת ושל מטריצת הגנראטור מזדהים.