תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם
במודלים של אמינות, מלאי ותורים
החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,
תוכנית ה – .M.A עם התמחות בלוגיסטיקה,
סמסטר אביב – תשס"ח
מרצה: יוני נצרתי.

פתרון לעבודת בית מס' 7:
מערכות תורים

גרסא 1.0

תרגיל 1:

בשאלה זו נדון בתכונות של מערכת תורים M/M/1 בעלת קצב כניסת לקוחות λ ותוחלת זמן שרות לקוחות μ^{-1}.

נתון: $\lambda < \mu$.

נתון שפתרון משוואות שווי משקל הוא $\pi_i = (1-\rho)\rho^i$ עבור $i = 0,1,2,3..$ ו - $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

1) מה הסיכוי שמספר הצרכנים במערכת גדול או שווה ל – 5 – רשום ביטוי.

פתרון:

נסמן X – מ"מ המציין את מס הצרכנים במערכת במצב יציב.

$$P(X \ge 5) = 1-(1-\rho)\sum_{i=0}^{4}\rho^i = 1-(1-\rho)\frac{1-\rho^5}{1-\rho} = \rho^5$$

ניתן להגיע לפתרון גם כך: המ"מ X מתפלג כמו מספר הכישלונות בניסיונות הברנולי שיש עד להצלחה. כאשר הסיכוי להצלחה הוא $1-\rho$. אם כך הסיכוי שיש 5 או יותר ניסיונות שקול לסיכוי שהיה כשלון ב 5 הניסויים הראשונים שזה ρ^5.

2) מה תוחלת מס' הצרכנים במערכת.

פתרון:

$\dfrac{\rho}{1-\rho}$. ניתן לקבל ערך זה על פי טבלת התפלגויות – התפלגות גיאומטרית סופרת כשלונות.

3) מה תוחלת מס' הצרכנים בתור.

פתרון:

מערכת = שרות + תור.

תוחלת מס' צרכנים בשרות היא $\pi_0 \cdot 0 + (\pi_1 + \pi_2 + ...)\cdot 1 = 1-\pi_0 = 1-(1-\rho) = \rho$

אז תוחלת מס הצרכנים בתור:

$$\frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

4) מה תוחלת זמן ההמתנה בתור (בתור בלבד) – השתמש בנוסחת ליטל.

פתרון:

$$\underbrace{L_q}_{\frac{\rho^2}{1-\rho}} = \lambda \cdot W_q$$

ולכן $W_q = \dfrac{\rho}{\mu-\lambda}$.

5) **בונוס:** כיצד לפי דעתך נראית התפלגות זמן ההמתנה **בתור**? רציפה? בדידה? שילוב? צייר באופן סכמאטי.
__פתרון:__

בו נחשוב על זה? ישנו סיכוי של $\pi_0 = 1-\rho$ שהמערכת תהייה ריקה. במקרה זה, זמן ההמתנה הוא 0.

וישנו סיכוי של $1-\pi_0 = \rho$ שהמערכת לא ריקה, במקרה זה זמן ההמתנה הוא הזמן עד לסיום השרות של כל הצרכנים הקודמים.

המשמעות היא שההתפלגות אינה בדידה ואינה רציפה אלה שילוב. זאת התפלגות עם "מאסה" (משקל) על 0 וחלק רציף מעבר לכך.

תזכורת: ידוע שהתפלגות זמן השהייה (תור + שרות) היא אקספונצאלית עם פרמטר $\mu-\lambda$. כאן אין צורך בהתפלגות שהיא משולבת רציפה/בדידה.

__תרגיל 2:__

בשאלה זו נשווה את מערכות התורים M/M/K/K ו – $M/M/\infty$.

1) תאר בקצרה מהי מערכת M/M/K/K (עבור K סופי). מהי דוגמא למערכת כזו במציאות.
פתרון:

זו מערכת עם K שרתים ו – K מקומות לצרכנים. המשמעות היא שכל צרכן במערכת מקבל שרות. צרכנים אשר מגיעים למערכת מלאה הולכים לאיבוד. דוגמא היא מערכת מרכזיית טלפון עם K קווים יוצאים.

2) חזור על הסעיף הקודם עבור מערכת $M/M/\infty$.
פתרון:

זו מערכת עם שרת עבור כל צרכן. ניתן לחשוב על כך שכל צרכן משרת את עצמו. ואין הגבלת מקום. דוגמא היא מערכת שבה צרכנים מגיעים, שוהים והולכים בלי להשפיע זה על זה. כדוגמא: חוף הים.

3) רשום את התפלגות הסטציונרית של מס' הצרכנים במערכת M/M/1/K ומערכת $M/M/\infty$ - העזר בספר הלימוד. האם יש תנאי כלשהו ליציבות?
פתרון:
ההתפלגויות רשומות בדף הנוסחאות של המבחן – למד אותן – חשוב.
אין תנאי ליציבות בגלל סיבות שונות:
מערכת M/M/1/K היא בעלת מספר מצבים סופי. לעולם לא "תתפוצץ". אז גם כאשר קצב הגעת הצרכנים מאוד גדול ביחס לקצב השרות היא לא תתפוצץ – פשוט יהיו הרבה צרכנים במערכת.
מערכת $M/M/\infty$ היא אמנם בעלת מרחב מצב אין-סופי – אז צריך להזהר. אבל ניתן לראות שכאשר יש מספר גדול מאוד של צרכנים במערכת, קצב החזרה לכוון ה 0 מהיר וקצב זה הולך וגובר באופן ליניארי עם מספר הצרכנים – אמנם זאת לא הוכחה – אבל המערכת יציבה לכל קצב הגעה ושרות. (שימו לב – לא כך עם מערכת M/M/1).

4) מה הקשר בין שתי ההתפלגויות? (רמז – מה קורה למערכת M/M/K/K כאשר $K \to \infty$).
פתרון:
באופן הגיוני רואים שכאשר K גדל, אז מערכת M/M/K/K הולכת ונראית כמו מערכת $M/M/\infty$.
רואים זאת גם מההתפלגויות. ההתפלגות של $M/M/\infty$ היא התפלגות פואסון עם פרמטר ρ. וההתפלגות של M/M/K/K היא "התפלגות פואסון קטומה" עם אותו פרממטר. הכוונה בהפלגות קטומה היא בכך

שהתומך אינו כל המספרים השלמים האי-שליליים אלה רק $\{0,...,K\}$. ניתן לראות שגורם הנרמול במערכת M/M/K/K שואף ל $e^{-\lambda}$. (תזכורת: $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}=e^x$.

תרגיל 3:

הנח כי מספר הסטודנטים בחוג לסטטיסטיקה מתנהג כמו מערכת במצב יציב. נתון כי מספר הסטודנטים הממוצע בחוג הוא 340. כמו כן נתון כי סטודנט מסיים/עוזב את לימודיו בממוצע לאחר 2.6 שנים. בנוסף ידוע שמבין אלו המבקשים להיכנס ללימודים בחוג, 62.5% מתקבלים.

בכל שנה, כמה סטודנטים בממוצע מסיימים את הלימודים?

פתרון:
נשתמש בנוסחת ליטל השימושית: $L=\lambda W$.
כאן $L=340$. $W=2.6$. אז $\lambda=\frac{340}{2.6}=130.8$. הוא קצב העוברים דרך המערכת בשנה.
הנתון של אחוז קבלה של 62.5% אינו רלוונטי.
הוא היה יכול להיות רלוונטי בווריאציה אחרת של השאלה – לדוגמא: כמה סטודנטים ניגשים ללימודים בכל שנה.