תהליכים סטוכסטיים ויישומיהם
במודלים של אמינות, מלאי ותורים
החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה,
תוכנית ה – .M.A עם התמחות בלוגיסטיקה,
סמסטר אביב – תשס"ח
מרצה: יוני נצרתי.

פתרון עבודת בית מס' 8:
תכנון אופטימאלי

גרסא 1.0

תרגיל 1:

בשאלה זו נדון בסניף דואר קטן ההולך להיפתח במרכז קניות.

בסניף מתוכנן להיות פקיד אחד בכל רגע נתון.

ידוע שקצב הגעת הלקוחות הוא $\lambda = 30$ לקוחות בממוצע בשעה. וניתן להניח שהלקוחות מגיעים על פי תהליך פואסון הומוגני בזמן.

בפני מנהל עומדת ההחלטה לגבי כמה כסף להשקיע במכשור והכשרת הפקיד. המנהל מניח (ידוע על פי מחקרים מסניפים אחרים) שתוחלת זמן השרות של הפקיד (עבור לקוח אחד) היא פונקציה של כמות הכסף שישקיע. ניתן לקרב את הפו' כך:

$$m(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

$m(x)$ - היא תוחלת זמן השרות של צרכן יחיד (בדקות) במידה והושקעו x אלפי שקלים בהכשרת הפקיד.

לדוגמא: אם הושקעו 3000 ₪ בהכשרת הפקיד, אז תוחלת זמן השרות היא $5/3$ דקות ולכן קצב השרות הוא $\mu = 3/5$.

א) מה הכמות המינימאלית שצריך להשקיע בכדי שהמערכת תהייה יציבה?
פתרון:
נדון ביחידות זמן של דקות.
נתון שקצב הלקוחות לשעה הוא 30. אז קצב הלקוחות לדקה הוא $\lambda = 1/2$. אם כך צריך $\mu > 1/2$.
נתון $\mu(x) = \frac{1}{m(x)} = \frac{1}{1+\frac{2}{x}} = \frac{x}{x+2}$

דרוש $\frac{1}{2} > \frac{x}{x+2}$ או $2x > x+2$ או $x > 2$.

אז לצורך יציבות צריך להשקיע יותר מ - 2000 ₪.

ב) נניח כי המנהל אינו רוצה שלקוחותיו ימתינו בממוצע יותר מ 2 דקות. כמה עליו להשקיע?
פתרון:

תוחלת זמן ההמתנה בתור M/M/1 היא: $\frac{\rho}{\mu - \lambda}$ (ראו תרגיל בית קודם).

אם כך: תוחלת זמן ההמתנה במערכת שלנו היא $\dfrac{(x+2)^2}{x(x-2)} = \dfrac{(x+2)\big/2x}{(x-2)\big/(2x+4)} = \dfrac{1/2\Big/\left(\dfrac{x}{x+2}\right)}{\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{1}{2}}$

רוצים $\dfrac{(x+2)^2}{x(x-2)} < 2$ או $(x+2)^2 < 2x(x-2)$

או

$$x^2+4x+4-2x^2+4x<0$$

או $x^2-8x-4>0$

מקבלים 2 פתרונות לאי-שוויון (משוואה ריבועית) אחד חיובי ואחד שלילי, הפתרון החיובי הוא $x>8.47$.

נבדוק שלא טעינו: נציב ערך זה ב $\dfrac{\rho}{\mu-\lambda}$

$\mu=\dfrac{8.47}{2+8.47}=0.81$. אז $\rho=\dfrac{0.5}{0.81}=0.62$. אז $\dfrac{\rho}{\mu-\lambda}=2$ .... הכל בסדר.

הערה: לא להילחץ מסעיף זה – הוא ברמה קצת יותר גבוהה מהנדרש במבחן.

ג) נניח כי המנהל מעוניין שפחות מ 5% מלקוחותיו ישהו במערכת (תור+שרות) יותר מ 10 דקות. כמה עליו להשקיע?

פתרון:

כאן נשתמש בעובדה שזמן השהייה במערכת מתפלג $\exp(\mu-\lambda)$ או במקרה שלנו $\exp(\dfrac{x-2}{2x+4})$.

ידוע שהסיכוי שמ"מ זה גדול מ 10 הוא $e^{-\left(\frac{x-2}{2x+4}\right)10}$.

אנו רוצים $e^{-\left(\frac{x-2}{2x+4}\right)10} < 0.05$

או $-\left(\dfrac{x-2}{2x+4}\right)10 < \ln(0.05) = -3$

או

$$\frac{x-2}{2x+4} > .3$$

או

$x>8$. אז צריך להשקיע לפחות 8000 ₪.

תרגיל 2:

בשאלה זו נדון במערכת שרות ללא תור בעלת K שרתים, קצב הגעת צרכנים λ (על פי תהליך פואסון) ותוחלת זמן שרות $1/\mu$ (ניתן להניח זמני שרות אקספוננציאלים).

נניח כי ברצוננו לקבוע את K תחת מבנה העלויות הבא:

א) עלות תחזוקת שרת ליחידת זמן היא c.

ב) הרווח משהייה של צרכן במערכת ליחידת זמן הוא p.

בנוסף אנו רוצים לדאוג שאחוז הצרכנים אשר ילך לעיבוד לא יהיה גדול מ 10%. (צרכנים אשר מגיעים למערכת מלאה הולכים לאיבוד).

1) נסח בעיית אופטימיזציה מתאימה. מהי פו' המטרה? מהו תחום הערכים אשר K יכול לקבל?

פתרון:

מדובר במערכת $M/M/K/K$, λ ו- μ נתונים. צריך לקבוע את K.

פו העלות היא: $cK - \sum_{i=0}^{K} p\ i\ \pi_i$.

אז:

$$\begin{aligned} &\min \quad cK - \sum_{i=0}^{K} p\ i\ \pi_i \\ &s.t. \quad \mathrm{K} \in \{1,2,3,...\} \end{aligned}$$

את ערכי π_i אנחנו יודעים מטבלה (לדוגמא טבלה של המבחן).

2) רשום ביטוי מקורב לפו' המטרה עבור K גדול (רמז השתמש במערכת $M/M/\infty$).

פתרון:

עבור K גדול מערכת $M/M/K/K$ דומה למערכת $M/M/\infty$ (ראה גם תרגיל בית קודם).

במקרה זה ידוע שההתפלגות הסטציונרית היא $Poisson(\frac{\lambda}{\mu})$, בעלת תוחלת $\frac{\lambda}{\mu}$ ואז:

$$cK - \sum_{i=0}^{K} p\ i\ \pi_i \approx cK - p\frac{\lambda}{\mu}.$$

הערה: כמובן שקרוב זה הוא גס מדי לצורך ביצוע האופטימיזציה בגלל שעל פיו הערך האופטימאלי הוא $K = 1$.