תרגול חזרה/השלמה בנושא אינטגרלים

- אינטגרלים לא מסוימים.
  - כלליים
  - הצבה.
  - חלקים
- אינטגרלים מסוימים.
- אינטגרלים לא אמיתיים.
- אינטגרלים כפולים.
- אינטגרל Gauss.

אינטגרלים כלליים (לא-מסוים).

- $\int f(x)dx =$ A function $F(x)$ such that $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$
- $\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$
- $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$

שיטת ההצבה: כאשר מופיע $\int f(g(x))g'(x)dx$
והוא לא כללי, ניתן לנסות להציב $u=g(x)$ ואז $du=dx\,g'(x)$
ומקבלים $\int f(u)du$ ואז אולי זה אינטגרל כללי.

דוגמאות

$$\int \frac{2t-3}{(t^2-3t+1)^2}\,dt = \int \frac{1}{u^2}\,du = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t^2-3t+1}$$

לפי
הגדרה

נציב

$u = t^2-3t+1$

$\frac{du}{dt} = 2t-3$

$du = (2t-3)dt$

$$\int x e^{x^2} dx = \int \frac{e^u}{2} du = \frac{e^u}{2} = \frac{e^{x^2}}{2}$$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

לזכור שהאינטגרל הוא לינארי:

$$\int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

דוגמא:

$$\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^2 dt = \int \left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{t}$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

דוגמאות

$$\int x \ln x^2 dx = \frac{x^2}{2}\ln x^2 - \int \frac{2}{x}\frac{x^2}{2}dx = \ln (x^2)^{\frac{x^2}{2}} - \int x\,dx$$

$u = \ln x^2 \qquad v' = x \qquad = \ln x^{(x^2)} - \frac{x^2}{2}$

$u' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \qquad v = \frac{x^2}{2} \qquad = x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} - -3\int x^2 e^{-x} \cancel{dx} = -x^3 e^{-x} + 3\int x^2 e^{-x} dx$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 12 e^{-x}$$

$u = x^3 \qquad v' = e^{-x}$

$$= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 12)$$

$u' = 3x^2 \qquad v = -e^{-x}$

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 4e^{-x}$$

$u = x^2 \qquad v' = e^{-x}$

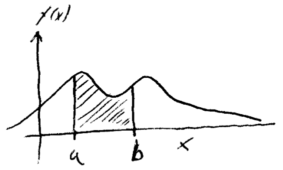
$u' = 2x \qquad v = -e^{-x}$

$$\int x e^{-x} = -e^{-x} + \int e^{-x} dx = -e^{-x} - e^{-x} = -2e^{-x}$$

$u = x \qquad v' = e^{-x}$

$u' = 1 \qquad v = -e^{-x}$

אינטגרל מסוים

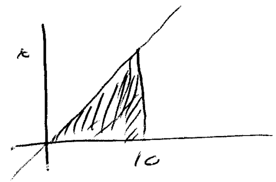


$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(F(x)\right|_a^b = F(b) - F(a) \equiv$$

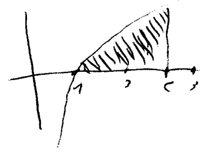
ביטוי שאינו
מכיל את X
יותר

האינטגרל
הלא
מסוים

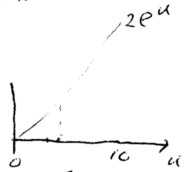
$$\int_0^{10} x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\right|_0^{10} = \frac{10^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 50$$



$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \left(\ln x\right|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$



$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\lambda}{-\lambda}\left(e^{-\lambda t}\right|_{t=0}^{t=x} = -\left(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda 0}\right) = 1 - e^{-\lambda x}$$



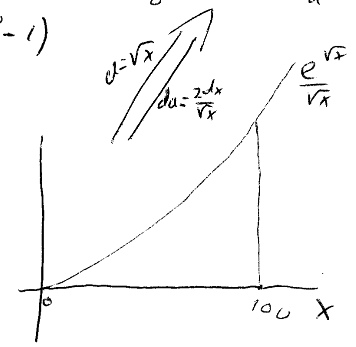
$x = 100 \Rightarrow \sqrt{x} = 10$

$$\int_0^{100} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{10} 2e^u\,du = 2\left[e^u\right|_0^{10} = 2(e^{10} - 1)$$

$u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

$2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$



לכל $k \geq 0$, $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(-x^k e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty k x^{k-1}(-e^{-\lambda x}) dx = 0 + k\int_0^\infty x^{k-1} e^{-\lambda x} dx$$

$u = x^k \quad v' = \lambda e^{-\lambda x}$

$u' = k x^{k-1} \quad v = -e^{-\lambda x}$

גבול

לופיטל

$$= \frac{k}{\lambda}\int_0^\infty x^{k-1} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

קיבלנו

$$\int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k}{\lambda}\int_0^\infty x^{k-1} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

נסמן

$$EX^k = \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx$$

ולכן

$$EX^k = \frac{k}{\lambda} EX^{k-1}$$

נזכור מהו

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 = EX^0$$

ולכן

$$EX^k = \frac{k}{\lambda} EX^{k-1}$$

$$= \frac{k}{\lambda} \frac{k-1}{\lambda} EX^{k-2}$$

$$= \frac{k}{\lambda} \frac{k-1}{\lambda} \cdot \frac{k-2}{\lambda} EX^{k-3}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{k}{\lambda} \frac{k-1}{\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\lambda} EX^0 = \frac{k!}{\lambda^k}$$

$f(x)$ פו רציפה ב- $[a,\infty)$

רוצים לדעת $\int_a^\infty f(x)dx$

אז נגדיר $I(b)=\int_a^b f(x)dx$ ונסמן $I=\lim_{b\to\infty} I(b)$

אם $I<\infty$ נאמר שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx=I$

הערה: ישנם אינטגרלים לא אמיתיים נוספים, אולם אנחנו נתמקד בסוג הזה ($\int_a^\infty$)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \left(\ln x\right|_1^\infty = \ln\infty - \ln 1 \Rightarrow$$ לא קיים

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right|_1^\infty = -\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{1}\right) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \left(\frac{1}{2}\cancel{x}^{\frac{1}{2}}\right|_1^\infty = \infty$$

עבור אילו α מתקיים $\int_1^\infty x^\alpha dx < \infty$?

קיים

$$\int_1^\infty x^\alpha dx = (\alpha+1)^{-1}x^{\alpha+1}\Big|_1^\infty = \lim_{x\to\infty}(\alpha+1)^{-1}x^{\alpha+1} - (\alpha+1)^{-1}$$

רוצים $\alpha+1<0$

$1<\alpha$

$f(x)$ פו רציפה ב- $[a,\infty)$

רוצים לדעת $\int_a^\infty f(x)dx$

אם נגדיר $I(b)=\int_a^b f(x)dx$ ונסמן $I=\lim_{b\to\infty} I(b)$

אם $I<\infty$ נאמר שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx=I$

הערה: ישנם אינטגרלים לא אמיתיים נוספים, אולם אנחנו נתמקד בסוג הזה ($\int_a^\infty$)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = (\ln x\Big|_1^\infty = \ln\infty - \ln 1 \Rightarrow$$ לא קיים.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = (-\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = -\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{1}\right) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac12}}dx = (\frac{1}{2}x^{\frac12}\Big|_1^\infty = \infty$$

עבור אילו α מתקיים $\int_1^\infty x^\alpha dx \underset{\text{קיים}}{<\infty}$?

$$\int_1^\infty x^\alpha dx = (\alpha+1)^{-1}x^{\alpha+1}\Big|_1^\infty = \lim_{x\to\infty}(\alpha+1)^{-1}X^{\alpha+1} - (\alpha+1)^{-1}$$

חייב $\alpha+1<0$

$1<\alpha$