1. מרחבי הסתברות

המושגים ״הסתברות״ או ״סיכוי״ הם מושגים שכיחים ביותר בחיי היום-יום. אדם הממלא טופס טוטו מעוניין למשל לדעת מה ההסתברות שהוא ינחש 15 מתוך 16 המשחקים בטופס הטוטו. אדם הממלא טופס לוטו רוצה להעריך את הסיכוי לזכות בפרס הגדול וכו׳.

קיימת מידה לא מבוטלת של חוסר בהירות בשימוש במושגים ״הסתברות״ או ״סיכוי״, הנובעת בעיקרה מהמשמעות הלא ברורה של מושגים אלו. ננסה להבהיר את המושגים האלה והשימוש בהם.

קודם כל נשאל את עצמנו מה מייחד את כלל המצבים בהם משתמשים במושגים ״הסתברות״ או ״סיכוי״. נתבונן במספר דוגמאות:

<u>דוגמא 1</u>

זורקים מטבע שעל צדדיה ״עץ״ ו- ״פלי״. אנו אומרים שסביר במידה שווה שתקרה אחת מהתוצאות ״עץ״ או ״פלי״ או שהסיכוי לכך שתופיע התוצאה ״עץ״ הוא 50%.

<u>דוגמא 2</u>

זורקים שתי קוביות, אדומה וירוקה. אנו אומרים שהסיכויים הם 1 ל- 5 שסכום המספרים על שתי הקוביות הוא 7, או שההסתברות לכך שסכום המספרים על שתי הקוביות הוא 7 היא $\frac{1}{6}$.

נשים לב שלמצבים בהם נוהגים להשתמש במונח הסתברות, מספר מרכיבים אופייניים:

א. נערך ניסוי (זריקת מטבע, הטלת שתי קוביות).

ב. לניסוי יש מספר תוצאות אפשריות, ואין כל אפשרות לחזות מראש את תוצאת הניסוי.

ג. לכל תוצאה של הניסוי מצרפים מספר האומר משהו על ה״סבירות״ שלה. מספרים אלה נקראים בשם ״הסתברויות״.

<u>הגדרות:</u>

1. <u>ניסוי מקרי:</u> כל פעולה שתוצאתה אינה ניתנת לניבוי ודאי.

2. <u>מרחב מדגם:</u> אוסף התוצאות האפשריות של ניסוי נתון. מסומן באות Ω.

3. <u>נקודת מדגם:</u> תוצאה אפשרית של הניסוי.

פה המקום להדגיש כי בהינתן ניסוי מקרי, לא בהכרח קיימת הצגה יחידה למרחב המדגם ולנקודת מדגם. לדוגמא: נניח הניסוי הוא מדידת הטמפרטורה בשעה 6 בבוקר בשדה תעופה מסוים. אם התוצאה המבוקשת היא הערך האמיתי של הטמפרטורה שנמדדה אזי מרחב

המדגם המתאים יהיה קבוצה של מספרים ממשיים המייצגים את כל הטמפרטורות האפשריות. אם מצד שני האינפורמציה היחידה שמעניינת אותנו היא האם הטמפרטורה מעל או מתחת לאפס, אזי מרחב המדגם המתאים יכלול רק 2 נקודות מדגם, אחת שתסומן *מתחת לאפס* והשניה *מעל לאפס*. כלומר אנו רואים שבהינתן ניסוי מקרי יכולות להתקבל תוצאות שונות והן תלויות אך ורק במה הן השאלות שישאלו.

4. <u>מאורע:</u> קבוצה של תוצאות אפשריות. כלומר קבוצה חלקית של מרחב המדגם Ω. מאורעות יסומנו באותיות A, B, C וכו'.

5. <u>מאורע פשוט:</u> מאורע המכיל תוצאה אחת בלבד.

<u>*דוגמא 1:*</u> נניח ניסוי של צפייה במספר קבצי נתונים בנק' זמן מסוימת הנמצאים ביחידת אחסון בעלת קיבולת של 1024 קבצים. מאחר ומספר הקבצים יכול להיות כל מספר שלם בין 0 ל- 1024, נרשום את Ω בצורה הבאה: $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 1024\}$ אם A הוא המאורע - "אין קובץ באחסון", אזי $A = \{0\}$ כלומר A הוא מאורע המכיל נקודת מדגם אחת בלבד או מאורע פשוט.

באופן דומה אם: $B = \{513, 514, \ldots, 1024\}$

אזי B הוא המאורע "יותר ממחצית יחידת האחסון מלאה".

<u>*דוגמא 2:*</u> נניח ניסוי של מדידת הטמפרטורה בנק' זמן מסוימת בחרמון. הטמפרטורה נעה בין מינימום -30 למקסימום +30 מעלות צלסיוס. מרחב מדגם מתאים יהיה:

$\Omega = \{t; -30 \le t \le +30\}$. ואם $A = \{t; 0 < t \le +30\}$ אזי A הוא המאורע שהטמפרטורה מעל ה- 0.

6. <u>מאורעות שווים (זהים):</u> נאמר כי שני מאורעות A ו- B שווים (או זהים) ונרשום A=B אם ורק אם יש להם אותם איברים, כלומר אם ורק אם A ו-B הם שני שמות שונים לאותה קבוצה של איברים.

נשים לב שניתן לעתים להגדיר מאורע ע"י רשימת כל איברי המאורע או ע"י תיאורו. כך נוכל להגדיר את המאורע A המכיל את שני האיברים +1 ו -1 על ידי:

$$A = \{-1, +1\} \quad \text{או על ידי} \quad A = \{x;\ x^2 = 1\}$$

מאחר ושתי ההצגות מגדירות אותם אלמנטים. משוויון מאורעות נובע גם כי כל שני מאורעות המוגדרים ע"י תיאור הם זהים אם התיאורים שקולים מבחינה לוגית. כך המאורעות:

$$B = \{k;\ k \text{ is a nonnegative, even integer}\} \quad \text{ו-} \quad D = \{k;\ k = 2j,\ j = 0, 1, 2, \ldots.\}$$

הם למעשה אותו מאורע.

יחס חשוב נוסף בין מאורעות הוא יחס הכלה. נניח, (דוגמא 1) יחידת אחסון בעלת קיבולת של 1024 קבצים. נגדיר מאורע A = "ביחידת האחסון שניים או ארבעה קבצים" ואת מאורע B = "ביחידת האחסון מספר זוגי של קבצים", כלומר:

$$A = \{2, 4\}$$

$$B = \{0, 2, 4, \ldots, 1022, 1024\}$$

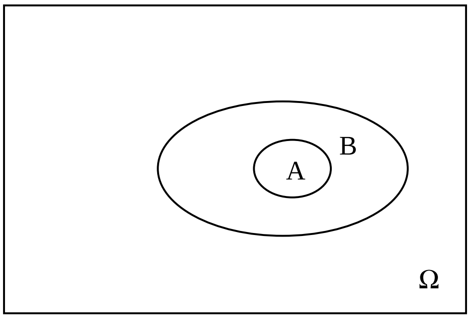
ברור שכל נקודת מדגם השייכת ל-A היא גם נקודת מדגם של B. נובע מכך שאם מאורע A קורה, אזי גם B מוכרח לקרות. במקרה זה אנו אומרים כי מאורע A גורר את מאורע B ורושמים: $A \subset B$

נהוג לומר במקרה זה כי "הקבוצה A מוכלת ב-B" או "A קבוצה חלקית של B".

החל מעתה נציין את העובדה שנקודת מדגם ω היא אלמנט של המאורע A ע"י הסימון: $\omega \in A$. נוכל לכן להגדיר -

7. <u>הכלה:</u> יהיו A ו-B מאורעות. נאמר כי מאורע A מוכל במאורע B אם ורק אם לכל $\omega \in A$ נובע כי $\omega \in B$.

נוח להציג את היחסים בין הקבוצות באמצעות דיאגרמת ון. (פילוסוף אנגלי, 1834-1923 הציג דיאגרמות כדי לתת ביטוי חזותי לפעולות בלוגיקה).



ברור שהיחס $A \subset B$ אינו גורר בהכרח את היחס $B \subset A$. אבל, אם נכון שגם $A \subset B$ וגם $B \subset A$, כלומר אם נכון שכל איבר של A הוא גם איבר של B, וכן כל איבר של B הוא גם איבר של A נובע מכך של-A ו-B יש אותם איברים ולכן A ו-B שווים.

נקבל מכאן את ההגדרה הבאה לשוויון מאורעות:

A=B אם ורק אם מתקיים ש $A \subset B$ וגם $B \subset A$. בהגדרה זו נשתמש כדי להוכיח ששני מאורעות שווים.

יחס ההכלה הוא רפלקסיבי כלומר, לכל מאורע A מתקיים: $A \subset A$.

יחס ההכלה הוא טרנזיטיבי כלומר, אם $A \subset B$ ו- $B \subset C$ אזי נובע ש $A \subset C$. כלומר אם מאורע A גורר את מאורע B (אם A קורה אז גם B קורה) ואם מאורע B גורר את מאורע C (אם B קורה אז גם C קורה) נובע ש-A גורר את C (אם A קורה גם C קורה).

אלגברה של מאורעות

פעמים רבות בדיונים הבאים נפגוש מצב שבו הגדרנו מאורעות מסוימים המעניינים אותנו ואחר כך יתברר לנו כי אנו מעונינים גם בצרופים שונים שלהם. למשל בדוגמא 1, ספירת מספר קבצי הנתונים ביחידת אחסון בעלת קיבולת של 1024 קבצים. נניח הגדרנו את מאורע A "יותר ממחצית יחידת האחסון מלאה",

כלומר: $A = \{513, 514, \ldots, 1024\}$

ואת מאורע B = "ביחידת האחסון מספר זוגי של קבצים", כלומר:

$$B = \{0, 2, 4, \ldots, 1022, 1024\}$$

יכול לקרות שאנו מעונינים גם במאורע C האומר "שאו שיותר ממחצית יחידת האחסון מלאה או שביחידת האחסון מספר זוגי של קבצים", כלומר:

$$C = \{0, 2, 4, \ldots, 512, 513, 514, \ldots, 1023, 1024\}$$

בנוסף יכול להיות שנתעניין במאורע D האומר "יותר ממחצית יחידת האחסון מלאה וגם ביחידת האחסון מספר זוגי של קבצים", כלומר:

$$D = \{514, 516, \ldots, 1022, 1024\}$$

ולבסוף במאורע E האומר "לכל היותר מחצית מיחידת האחסון מלאה" כלומר:

$$E = \{0, 1, 2, \ldots, 511, 512\}$$

השוואה בין המאורעות A עד E מראה כי מאורע C מכיל את כל האיברים הנמצאים בלפחות אחד מהמאורעות A או B, מאורע D מכיל את כל האיברים הנמצאים גם במאורע A וגם במאורע B, ומאורע E מכיל את האיברים ב-Ω שאינם ב-A. קומבינציות כאלה של

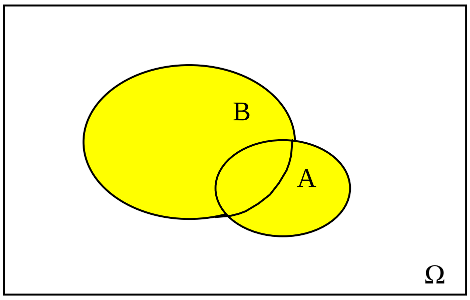
מאורעות יחזרו שוב ושוב ולכן נוח לקרוא להם בשמות - איחוד, חיתוך והשלמה (בהתאמה) וללמוד את התכונות שלהם. שטח זה נקרא "אלגברה של מאורעות".

<u>הגדרות:</u>

1. <u>איחוד:</u> יהיו A ו-B מאורעות. "האיחוד של A ו-B" מסומן ב- $A \cup B$ ומוגדר כקבוצת כל האיברים השייכים למאורע A או למאורע B או לשניהם.

$$A \cup B = \{\omega;\ \omega \in A \ \text{ or } \ \omega \in B \ \text{ or both}\}$$

המצב הזה מוצג סכימטית על ידי דיאגרמת ון, כאשר איחוד המאורעות מוצלל. (יש לשים לב שהנקודות השייכות גם ל-A וגם ל-B נספרות רק פעם אחת)



נשים לב שנובע ישירות מההגדרה כי: אם A ו-B מאורעות כלשהם אזי: $A \subset A \cup B$ וגם $B \subset A \cup B$. המשפט הבא מקשר בין רעיון ההכלה והאיחוד.

<u>משפט **1**:</u> יהיו A ו-B מאורעות כלשהם. נאמר כי $B \subset A$ אם ורק אם $A \cup B = B$.

הוכחה עלינו להוכיח שני כיוונים:

כיוון ראשון: אם $A \cup B = B$, אזי נובע $A \subset B$.

כיוון שני: אם $A \subset B$, אזי נובע $A \cup B = B$.

כיוון ראשון: נניח $\omega \in A$. מכיוון ש $A \subset A \cup B$ $\Leftarrow$ $\omega \in A \cup B$. מתוך הגדרה של שוויון קבוצות ומכיוון שלפי ההנחה $A \cup B = B$ נובע $\omega \in B$. הראינו שאם $A \cup B = B$, אזי $\omega \in A$ גורר $\omega \in B$, כלומר הראינו ש $A \subset B$.

כיוון שני: לפי הגדרה $B \subset A \cup B$. נניח $\omega \in A \cup B$ לכן לפי הגדרת איחוד מאורעות $\omega \in A$ או $\omega \in B$. נניח $\omega \in A$. מאחר ולפי ההנחה $A \subset B$ נובע ש $\omega \in B$ כלומר הראינו שבכל מקרה אם $\omega \in A \cup B$ אזי $\omega \in B$ $\Leftarrow$ $A \cup B \subset B$. ולכן מתקיים $A \cup B = B$.

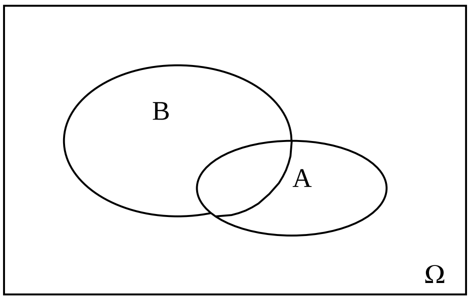
תכונות בסיסיות של האיחוד הן כדלקמן: יהיו A ו-B מאורעות כלשהם אזי

חוק החילוף $A \cup B = B \cup A$ חוק

הקיבוץ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

2. <u>חיתוך:</u> יהיו A ו-B מאורעות. "החיתוך של A ו-B" מסומן ב- $A \cap B$ ומוגדר כקבוצת כל האיברים השייכים למאורע A וגם למאורע B .

$$A \cap B = \{\omega;\ \omega \in A \text{ and } \omega \in B\}$$



נשים לב שנובע ישירות מההגדרה כי: אם A ו-B מאורעות כלשהם אזי: $A \cap B \subset A$ וגם $A \cap B \subset B$. המשפט הבא מקשר בין רעיון ההכלה והחיתוך.

<u>משפט **2**:</u> יהיו A ו-B מאורעות כלשהם. נאמר כי $A \subset B$ אם ורק אם $A \cap B = A$.

תכונות בסיסיות של החיתוך הן כדלקמן: יהיו A ו-B מאורעות כלשהם אזי

חוק החילוף $A \cap B = B \cap A$ חוק

הקיבוץ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

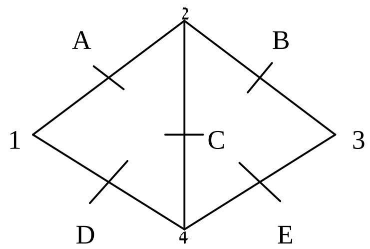
חזרה על ההגדרות והתוצאות עבור פעולות האיחוד והחיתוך מראה כי תכונותיהם דומות לפעולות האריתמטיות הרגילות של חיבור ומכפלה, בהתאמה.

תרגיל:

הוכח את חוקי הפילוג: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

דוגמא: נתונה המערכת החשמלית הבאה



נסמן ב-A את המאורע מפסק A סגור, ב-B את המאורע מפסק B סגור וכו'. נגדיר גם את המאורע K_{13} = קיים מסלול סגור בין 1 ל- 3.

א. הראה באמצעות התבוננות בדיאגרמה כי

$$K_{13}=(A\cap B)\cup(D\cap E)\cup(A\cap C\cap E)\cup(B\cap C\cap D)$$

ב. הראה גם כי

$$K_{13}=\{A\cap[B\cup(C\cap E)]\}\cup\{D\cap[E\cup(C\cap B)]\}$$

3. <u>המשלים:</u> קבוצת נקודות המדגם של מרחב מדגם מסוים שאינן שייכות למאורע A נקראת המאורע המשלים של A ומסומנת ב- A^c או ב- $\overline{A}$.

$$A^c=\{\omega;\ \omega\notin A \text{ and } \omega\in\Omega\}$$

מהגדרת המאורע המשלים רואים שלכל מאורע $A\subset\Omega$ מתקיים:

א. $(A^c)^c=A$

ב. אם $A\subset B$ אזי $A^c\supset B^c$ כלומר $B^c\subset A^c$.

4. <u>הקבוצה הריקה:</u> קבוצה שאינה מכילה איברים, מסומנת באות ϕ.

נחזור לניסוי של ספירת קבצי הנתונים ביחידת האחסון בעלת קבולת של 1024 קבצים. נניח A הוא המאורע "יותר ממחצית יחידת האחסון מלאה",

כלומר: $A=\{513, 514, \dots, 1024\}$

ויהי B המאורע "ביחידת האחסון 10 קבצים", כלומר $B=\{10\}$

אנו שמים לב כי לשני המאורעות אין נקודת מדגם משותפת ולכן החיתוך שלהם אינו מכיל נקודות מדגם. מכיוון שמצב כזה יכול לקרות לעתים קרובות בהמשך, נוח להציג כאן טרמינולוגיה מיוחדת שתתאר מצב כזה. אנו נאמר כי שני מאורעות שאין להם איבר משותף הם מאורעות זרים, ונשים לב כי אם אחד מהם קורה השני בטוח לא קורה. למאורע שאינו מכיל נקודת מדגם נקרא המאורע הריק או המאורע הבלתי אפשרי, ונסמן אותו באות ϕ.

בדוגמא שלנו מתקיים $A \cap B = \phi$. יש לשים לב כי המאורע הריק ϕ והמאורע "אין קבצים באחסון (המאורע $\{0\}$) הם מאורעות שונים.

מההגדרות הנ"ל נובע מיידית כי כל מאורע ומשלימו הם מאורעות זרים. כלומר, לכל מאורע A ב-Ω: $A \cap A^c = \phi$

בנוסף נובע גם ש: $\Omega^c = \phi$ ולכן גם $\phi^c = \Omega$, מכיוון שאם Ω מכילה את כל נקודות המדגם האפשריות, אז המשלים שלה לא יכול להכיל איזו שהיא נקודה.

<u>*טענות:*</u> יהי A מאורע כלשהו ב- Ω, ויהי ϕ המאורע הריק אזי:

א. $A \cup \phi = A$

ב. $A \cap \phi = \phi$

ג. $A \cup \Omega = \Omega$

ד. $A \cap \Omega = A$

סביר להניח כי כל מאורע שאינו מכיל איברים יהיה בעל תכונות לא רגילות. נשים לב שטענה ב' טוענת בעצם שהמאורע הריק זר לכל מאורע אחר (וגם זר לעצמו)! תוצאה מוזרה נוספת נדרשת אם מבקשים שיתקיימו היחסים הבאים בין חיתוך מאורעות והכלה של מאורעות : $A \cap B \subset A$ וגם $A \cap B \subset B$ עבור כל זוג מאורעות - זרים או לא. כאשר לשני מאורעות A ו-B יש איברים משותפים אזי נראה הגיוני שיתקיים $A \cap B \subset A$ וגם $A \cap B \subset B$. אבל אם A ו-B מאורעות זרים, כלומר $A \cap B = \phi$ ואנו רוצים כי שיתקיים $A \cap B \subset A$ וגם $A \cap B \subset B$ נובעת בהכרח התוצאה $\phi \subset B$ וגם $\phi \subset A$! למרות שהתוצאה נראית מוזרה, נחליט שהחיתוך מוכל בכל אחד מהמאורעות בכל המקרים. מעתה נדרוש *שלכל* מאורע A יתקיים $\phi \subset A$, כלומר המאורע הריק מוכל בכל מאורע.

תרגיל: נניח מרחב מדגם המכיל מספר סופי, n של נקודות כלומר

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

א. רשום את כל הקבוצות החלקיות של Ω כאשר $n = 3$.

ב. הראה כי לכל n, מספר הקבוצות החלקיות הוא 2^n.

5. חוקי דה-מורגן: (ע"ש אוגוסטוס דה-מורגן, מתמטיקאי אנגלי שחי בשנים 1806-1871)

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

מעניין לשים לב שניתן לקבל את שיוויון 2. משיוויון 1. פשוט על ידי החלפת פעולות האיחוד והחיתוך. זה מקרה פרטי של "עקרון הדואליות".

כל שוויון נכון הנוצר מאיחודים חיתוכים והשלמה של מאורעות נשאר נכון אם הסימנים: $\phi \quad \Omega \quad \subset \quad \cap \quad \cup$ יוחלפו ב: $\Omega \quad \phi \quad \supset \quad \cup \quad \cap$ בהתאמה. בתנאי שהיחס של שוויון ופעולת ההשלמה יישארו ללא שינוי.

תרגיל: נתונה הדוגמא של המערכת החשמלית בעמ' 7. המאורע K_{13}^c הוא המאורע שאין מסלול סגור בין 1 ל- 3. הראה כי

$$K_{13}^c = (A^c \cap D^c) \cup (B^c \cap E^c) \cup (A^c \cap C^c \cap E^c) \cup (B^c \cap C^c \cap D^c)$$

על-ידי שימוש בעיקרון הדואליות כדי לקבל את המשלים למאורע K_{13} ואחר כך שימוש בחוקי דה-מורגן.

6. חלוקות **(Partititions)**:

בעיה נפוצה בתיאורית ההסתברות ובשימושיה היא חלוקה של מרחב או מאורע למאורעות זרים. מהגדרת מאורע משלים נובע שמאורע A ומשלימו A^c זרים וכן איחודם הוא המרחב כולו. כלומר:

$$A \cap A^c = \phi$$

$$A \cup A^c = \Omega$$

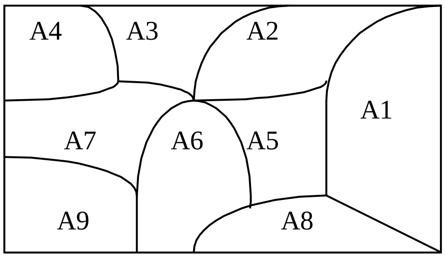
אנו אומרים לכן כי A מחלק את מרחב המדגם.

כללית, נאמר כי המאורעות (הקבוצות) $A_1, A_2, \dots, A_n$ מחלקים את מרחב המדגם Ω אם ורק אם (כאשר n סופי או אינסופי):

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

כלומר איחוד המאורעות הוא Ω, וגם אם $A_i \cap A_j = \phi$ לכל $i \neq j$. כלומר אם הם זרים בזוגות.

דוגמא לחלוקה כזו בציור הבא למקרה ש $n = 9$:



אחרי שחילקנו את מרחב המדגם נוכל להשתמש בחלוקה כזו לקבלת חלוקה של כל מאורע המוכל במרחב מדגם זה. לדוגמא: נניח נתונים לנו שני מאורעות A ו-B , ואנו רוצים לחלק את B על ידי A. נובע מהתוצאות שלמעלה והתוצאות הקודמות ש-

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

נובע גם כי
$$(B \cap A) \cap (B \cap A^c) = B \cap (A \cap A^c) = B \cap \phi = \phi$$

<u>*תרגיל*</u>: נניח המאורעות $A_1, A_2, \dots, A_n$ מחלקים את מרחב המדגם Ω, וש-B מאורע ב-Ω.

נגדיר: $B_i = B \cap A_i \quad i = 1, 2, \dots, n$.

הראה כי $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ וכן כי $B_i \cap B_j = \phi$ עבור $i \neq j$.