7. סדרות של מאורעות:

חלק גדול של הסתברות מתקדמת עוסק בתכונות של סדרות של מאורעות, כלומר, בסדרות של תת-קבוצות של מרחב מדגם נתון.

סדרת מאורעות מונוטונית עולה :

סדרת המאורעות $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ נקראת סדרת מאורעות מונוטונית עולה אם כל מאורע בסדרה מוכל במאורע הבא אחריו, כלומר אם ורק אם

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

דוגמא: נתון מרחב המדגם = קטע היחידה על הישר הממשי $\Omega = \{x\,;\,0 \le x \le 1\}$

נגדיר את המאורעות A_i בצורה הבאה: $i = 1, 2, 3, \ldots$ $A_i = \left\{x\,;\,\frac{1}{i+1} < x \le 1\right\}$

כלומר:

$$A_1 = \left\{x\,;\,\frac{1}{2} < x \le 1\right\} \quad A_2 = \left\{x\,;\,\frac{1}{3} < x \le 1\right\} \quad A_3 = \left\{x\,;\,\frac{1}{4} < x \le 1\right\}$$

וכו'. אנו יכולים לכן לראות כי מתקיים $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, כלומר הסדרה מונוטונית עולה.

איחוד של מאורעות בסדרת מאורעות מונוטונית עולה:

ממשפט 1 נובע כי , מכיוון ש $A_1 \subset A_2$ מתקיים $A_1 \cup A_2 = A_2$.

באופן כללי, מכיוון ש $A_{n-1} \subset A_n$ אזי עבור $n \ge 2$ מתקיים $A_{n-1} \cup A_n = A_n$.

לכן, עבור מאורעות A_i מסדרת מאורעות מונוטונית עולה מתקיים:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A_n$$

עד עתה דנו באיחוד מספר סופי של מאורעות. נרחיב את ההגדרה למספר בר-מניה של מאורעות. נגדיר:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega\,;\,\omega \in A_1 \text{ or } \omega \in A_2 \text{ or } \omega \in A_3 \text{ or } \cdots\}$$

נגדיר גבול של סדרת מאורעות מונוטונית עולה -

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

בדוגמא שלנו: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{x\,;\,\frac{1}{n+1} < x \le 1\right\}$

ולכן: $\lim_{n\to\infty} A_n = \{x\,;\,0 < x \le 1\}$

מעניין לראות כי בדוגמא שלנו מתקיים $\Omega = \{0\} \cup \lim_{n\to\infty} A_n$, מאחר שהגבול של הסדרה הנתונה אינו כולל את הנקודה $x = 0$.

<u>סדרת מאורעות מונוטונית יורדת :</u>

סדרת המאורעות $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ נקראת סדרת מאורעות מונוטונית יורדת אם כל מאורע בסדרה מכיל את המאורע הבא אחריו, כלומר אם ורק אם

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

דוגמא: נתון מרחב המדגם = קטע היחידה על הישר הממשי $\Omega = \{x\ ;\ 0 \le x \le 1\}$

נגדיר את המאורעות A_i בצורה הבאה: $i = 1, 2, 3, \ldots$ $A_i = \left\{x\ ;\ 0 < x < \frac{1}{i}\right\}$

כלומר:

$$A_1 = \{x\ ;\ 0 < x < 1\} \quad A_2 = \left\{x\ ;\ 0 < x < \frac{1}{2}\right\} \quad A_3 = \left\{x\ ;\ 0 < x < \frac{1}{3}\right\}$$

וכו'. אנו יכולים לכן לראות כי מתקיים $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, כלומר הסדרה מונוטונית יורדת.

חיתוך של מאורעות בסדרת מאורעות מונוטונית יורדת:

ממשפט 1 נובע כי , מכיוון ש $A_1 \supset A_2$ מתקיים $A_1 \cap A_2 = A_2$.

באופן כללי, מכיוון ש $A_{n-1} \supset A_n$ אזי עבור $n \ge 2$ מתקיים $A_{n-1} \cap A_n = A_n$.

לכן, עבור מאורעות A_i מסדרת מאורעות מונוטונית יורדת מתקיים:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = A_n$$

עד עתה דנו בחיתוך מספר סופי של מאורעות. נרחיב את ההגדרה למספר בר-מניה של מאורעות. נגדיר:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega\ ;\ \omega \in A_1 \text{ and } \omega \in A_2 \text{ and } \omega \in A_3 \text{ and } \cdots\}$$

נגדיר גבול של סדרת מאורעות מונוטונית יורדת -

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

בדוגמא שלנו: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x\ ;\ 0 < x \le \frac{1}{n}\right\}$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \{x\ ;\ 0 < x < 0\} = \phi$$

מכיוון שלא קיים מספר ממשי x שהוא גם גדול מ- 0 וגם קטן מ- 0.