פרק 2 : הסתברות

בפרק 1 הצגנו את העיקרון של נקודות מדגם ומרחבי מדגם המייצגים תוצאה אפשרית ואוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי מקרי בהתאמה. דנו גם במאורעות (קבוצה של תוצאות אפשריות) שהם קבוצות חלקיות של מרחב המדגם.

בפרק זה נגדיר פורמלית את האקסיומות של ההסתברות.

אקסיומה 1 :

נתון ניסוי מקרי, קיימים: מרחב מדגם Ω המייצג את אוסף כל התוצאות האפשריות של הניסוי, ואוסף $\boldsymbol{A}$ של תת קבוצות A של Ω הנקראים מאורעות.

אקסיומה 2 :

לכל מאורע A באוסף המאורעות $\boldsymbol{A}$, נתאים מספר ממשי לא שלילי $P(A)$, הנקרא 'ההסתברות של A' כלומר מספר המקיים: $P(A) \geq 0$.

אקסיומה 2 אומרת לנו כי הפונקציה P מוגדרת על האוסף $\boldsymbol{A}$ אבל היא אינה אומרת כיצד להגדיר את הפונקציה. את התשובה לכך קובע המודל הפיזיקלי שאנו מניחים . אם לדוגמא הניסוי הוא זריקת קוביה ואנו מניחים שהקוביה הוגנת אזי $P(1) = P(2 \qquad 6) = \frac{1}{6}$

אבל אם מסיבה מסוימת מישהו שם משקל בקוביה כך שהתוצאה 6 לא תקרה לעולם אזי $P(6) = 0$.

אקסיומה 3 :

$P(\Omega) = 1$

אקסיומה 3 אומרת שההסתברות של המאורע הוודאי שווה 1. יש לשים לב שההצהרה ההפוכה לא בהכרח נכונה כלומר אם $P(A) = 1$ זה לא בהכרח נכון ש $A = \Omega$.

אקסיומה 4 :

אם A ו-B מאורעות זרים כלומר, $A \cap B = \phi$, אזי $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. פונקציה P כזאת נקראת אדיטיבית סופית.

כמו שנראה בהמשך (משפט 2.1) ארבעת האקסיומות האלה מספיקות לכל הבעיות ההסתברותיות שבהן למרחב המדגם מספר סופי של נקודות מדגם. כדי לעבוד עם מרחבי הסתברות המכילים מספר אינסופי של נקודות, עלינו להרחיב את אקסיומה 4 לאקסיומה הבאה:

אקסיומה 5 :

יהיו $A_1, A_2, A_3, \ldots$ מאורעות זרים בזוגות, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \phi$, אזי

$$P(\bigcup_{i-1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

פונקציה P כזאת נקראת אדיטיבית בת-מניה.

הערה: כאשר מניחים קיום אקסיומה מס' 5, אקסיומה מס' 4 הופכת לתכונה של פונקצית הסתברות.

מאקסיומות 4 ו- 5 ברור שהגדרנו הסתברות של איחוד מאורעות רק כאשר המאורעות זרים. זו הסיבה שבעתיד כאשר יהיה לנו אוסף של מאורעות כלשהם בדרך כלל נבנה מהם אוסף חדש של מאורעות זרים.

לסיכום, ההגדרה הפורמלית של הסתברות כוללת 3 מרכיבים : $(\Omega\,,\,\mathcal{A},\mathrm{P})$ השלשה הזו נקראת מרחב הסתברות.

2. תכונות בסיסיות של פונקצית הסתברות.

בפסקה זו נניח קיום של מרחב הסתברות לגיטימי $(\Omega\,,\,\mathcal{A},\mathrm{P})$, כלומר נניח קיים מרחב מדגם Ω, אוסף מתאים של מאורעות $\mathcal{A}$, ופונקצית הסתברות P המתאימה הסתברות כשצריך.

מהאקסיומות בפסקה הקודמת נובעות התכונות הבאות של פונקצית הסתברות:

1. נתון מאורע A במרחב הסתברות Ω, עם הסתברות $\mathrm{P(A)}$ אזי:

$$\mathrm{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

<u>הוכחה</u>: לפי הגדרת המשלים מתקיים

$$\mathrm{A \cup A^c = \Omega}$$
$$\underline{\mathrm{A \cap A^c = \phi}}$$

מאקסיומה 3 נובע כי $\mathrm{P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1}$

ומכיוון ש A ו-$\mathrm{A^c}$ הם מאורעות זרים, נשתמש באקסיומה 4 ונקבל

$$\mathrm{P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)}$$

כלומר: $\mathrm{P(A^c) = 1 - P(A)}$.

2. $\mathrm{P(\phi) = 0}$. ההסתברות של המאורע הריק (הבלתי אפשרי) שווה 0.

   הוכחה לפי תכונה 1.

3. יהיו A ו-B מאורעות במרחב הסתברות Ω, כך ש $\mathrm{A \subset B}$ אזי $\mathrm{P(A) \le P(B)}$.

4. יהי A מאורע במרחב הסתברות Ω, אזי הסתברותו $\mathrm{P(A) \le 1}$.

5. יהיו A ו-B מאורעות כלשהם במרחב הסתברות Ω, אזי

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

מתכונה זו נובע לכן $\mathrm{P(A \cup B) \le P(A) + P(B)}$

6. יהיו A ו-B מאורעות כלשהם במרחב הסתברות Ω, אזי

$$\mathrm{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}$$

3. *מרחבי הסתברות אלמנטריים וסימטריים*

הדיון שלנו בבעיות הסתברותיות יתרכז בשלב ראשון במרחבי הסתברות אלמנטריים. מרחבים אלו מאופיינים על-ידי כך שמרחב המדגם מכיל מספר סופי או סדרה של נקודות מדגם. כלומר ניתן להציג את מרחב המדגם Ω בצורה הבאה:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \}$$

למרחבי הסתברות אלה נוהגים לצרף את אוסף המאורעות הרחב ביותר, כלומר, באוסף המאורעות $\boldsymbol{A}$ תופענה כל הקבוצות החלקיות ל- Ω. פונקצית ההסתברות P נקבעת במקרה זה על ידי סדרת הערכים:

$$p_i = P(\{\omega_i\}) \qquad i = 1, 2, \dots$$

כלומר על-ידי ההסתברויות של המאורעות הפשוטים.

ואם A מאורע ב-Ω, אזי הסתברותו $P(A)$ נתונה על ידי:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

בגלל האדיטיביות של P. כמובן שהערכים p_i עבור $i = 1, 2, \dots$ מקיימים את שתי הדרישות:

$$0 \le p_i \le 1 \qquad i = 1, 2, \dots$$
$$\sum_i p_i = 1$$

מקרה פרטי של מרחב הסתברות אלמנטרי הוא מרחב הסתברות סימטרי. למרחבי הסתברות אלמנטריים, בהם לכל אחת מהתוצאות של הניסוי יש הסתברות שווה קוראים מרחבי הסתברות סימטריים.

במרחבים אלו מספר נקודות המדגם הוא סופי. ואם נסמן ב- $n(\Omega)$ את מספר הנקודות ב-Ω (מספר התוצאות האפשריות של הניסוי) אזי הסתברות של כל מאורע פשוט (מאורע המכיל נקודת מדגם אחת בלבד היא $\frac{1}{n(\Omega)}$, ולכן אם A מאורע אזי הסתברותו $P(A)$ נתונה על-ידי:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

כאשר $n(A)$ מספר התוצאות ב-A. לחישוב הסתברויות במרחבים סימטריים יש איפוא למצוא את מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם ובמאורע בו דנים. חישובים אלה הם בעיקר חישובים קומבנטוריים.

3.1 חישובי הסתברות במרחבי הסתברות סימטריים

עקרון הכפל

מספר התוצאות בניסוי רב-שלבי הוא מכפלת מספרי התוצאות האפשריות בכל אחד מהשלבים. או בניסוח אחר:

אם לניסוי יש k שלבים ומספרי התוצאות האפשריות בשלבים השונים הם:

n_1 תוצאות אפשריות בשלב הראשון

n_2 תוצאות אפשריות בשלב השני

.

.

.

n_k תוצאות אפשריות בשלב ה k י

אזי מספר תוצאות הניסוי הוא: $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

מדגמים

נתונה קבוצה בת n עצמים שונים. הניסוי הוא בחירת r עצמים מאברי הקבוצה כלומר, דוגמים מהקבוצה r עצמים. נבדיל בין סוגים שונים של מדגמים (לפי צורת הניסוי):

א. הדגימה יכולה להתבצע עם החזרה או ללא החזרה.

ב. מדגם סדור או לא סדור, כלומר האם יש חשיבות לסדר ההופעה של האיברים או אין חשיבות לסדר הופעתם.

מדגם סדור הגדרה:

נתונה קבוצה בת n עצמים שונים. מדגם סדור בגודל r מהקבוצה הוא שורה (מסודרת) של r עצמים מאיברי הקבוצה.

כדי לחשב את מספר המדגמים הסדורים (מספר השורות המסודרות) נשתמש בחוק הכפל כלומר נתייחס אל בחירת המדגם כמו אל ניסוי r שלבי:

	מדגם בלי החזרה					מדגם עם החזרה				
מספר סידורי במדגם	1	2	3	.	r	1	2	3	.	r
מספר האפשרויות	n	$n-1$	$n-2$		$n-r+1$	n	n	n		n

מסקנה - מספר המדגמים הסדורים בגודל r מקבוצה בת n עצמים הוא:

א. כאשר הדגימה עם החזרה : n^r

ב. כאשר הדגימה ללא החזרה : $(n)_r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

תוצאות

א. עבור $r = n$ אזי $(n)_r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1 = n!$

כלומר $n!$ הוא מספר האפשרויות לסידור n עצמים בשורה.

ב. כדי לשמור על הקשר $n! = (n-1)!\cdot n$ לכל $n = 1, 2, \ldots$ נסכים כי $0! = 1$.

<u>מדגם לא סדור הגדרה:</u>

נתונה קבוצה בת n עצמים שונים. מדגם לא סדור בגודל r מהקבוצה הוא קבוצה חלקית בת r עצמים.

נחשב את מספר המדגמים הלא סדורים:

<u>א. דגימה ללא החזרה</u>

כאשר הדגימה ללא החזרה נשתמש בקשר בין מספר המדגמים הסדורים ומספר המדגמים הלא סדורים. מכל קבוצה חלקית (מדגם לא סדור) בגודל r ניתן ליצור $r!$ מדגמים סדורים, כמספר האפשרויות להעמיד את r האיברים בשורה. במילים אחרות, יש פי $r!$ יותר מדגמים סדורים מאשר לא סדורים ומכאן:

מספר המדגמים הלא סדורים ללא החזרה הוא: $\frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

סימון: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$.

$\binom{n}{r}$ נקרא המקדם הבינומי ומקיים את התכונות הבסיסיות הבאות:

א. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

ב. $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{0} = 1$

ג. לכל $r > n$ $\binom{n}{r} = 0$

נוסחת הבינום של ניוטון : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

תרגיל:

הראה כי : (a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

(b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$

<u>שימושים</u>

<u>דוגמא</u>

בכד $a + b$ כדורים, מתוכם a כדורים לבנים ו- b כדורים שחורים. מה מספר האפשרויות לסידור הכדורים בשורה ?

מאחר ואין לנו אפשרות להבדיל בין הכדורים השונים אלא רק בצבעם, נבדלים הסידורים השונים של הכדורים בשורה במקומות בהם מופיעים הכדורים הלבנים (ביתר המקומות יופיעו כמובן הכדורים השחורים). לכן מספר האפשרויות לסידור הכדורים הוא כמספר האפשרויות לבחור מקומות ל- a הכדורים הלבנים מתוך $(a + b)$ המקומות. כלומר לבחור קבוצה חלקית מגודל a מתוך $a + b$. לכן מספר הסידורים השונים הוא $\binom{a+b}{a}$.

נשים לב גם לכך ש: $\binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a!\cdot b!}$

$(a + b)!$ הוא מספר הסידורים השונים של $(a + b)$ הכדורים בשורה לו הכדורים היו שונים זה מזה, למשל לו היו רשומים על הכדורים המספרים $\underbrace{a+1, a+2, \ldots, a+b}^{\text{שחורים}}, \overbrace{1, 2, \ldots, a}^{\text{לבנים}}$. בהיקבע a מקומות בשורה לכדורים הלבנים ובהתאם לכך ל- b הכדורים השחורים, ניתן היה לסדר את a הכדורים הלבנים הממוספרים ב- $a!$ סידורים שונים במקומות אלו ואת b הכדורים השחורים ב- $b!$ סידורים שונים במקומות שנקבעו להם. לכן לפי עיקרון הכפל מספר הסידורים הפנימיים הוא $a!\cdot b!$. אם לא נתחשב במספרים שעל הכדורים אלא רק בצבעם, הרי $a!\cdot b!$ הסידורים השונים מגדירים אותו סידור של a הכדורים הלבנים ו- b הכדורים השחורים בשורה. יוצא איפוא, שניתן לקבל את מספר האפשרויות השונות על-ידי חישוב מספר הסידורים השונים לו ניתן להבחין בין הכדורים ואחר כך חלוקה במספר הסידורים הפנימיים. נוכל להכליל את עיקרון זה ולקבל את:

<u>המקדם המולטינומי</u>

נתונים n עצמים מ- k סוגים :

n_1 מסוג 1

n_2 מסוג 2

.

.

.

n_k מסוג k

כאשר $n_1 + n_2 + \quad + n_k = n$, ואין אפשרות להבחין בין עצמים מאותו סוג. מספר האפשרויות לסידור n העצמים בשורה הוא:

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$ נקרא המקדם המולטינומי.

$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$ הוא גם מספר האפשרויות לחלוקת n עצמים ל-k קבוצות כך שבקבוצה הראשונה n_1 איברים, בקבוצה השניה n_2 איברים, בקבוצה ה-k-ית n_k איברים.

ב. דגימה עם החזרה

כאשר הדגימה עם החזרה יכול איבר מסוים להופיע במדגם יותר מפעם אחת. כדי למצוא את מספר המדגמים הלא סדורים ללא החזרה נתבונן בבעיה הבאה:

בעיית מילוי

נתונים r כדורים ו-n תאים שונים. מפזרים את הכדורים בתאים. מה מספר האפשרויות השונות לכך?

נבחין בין שני מקרים, בהתאם לכך אם ניתן להבחין בין r הכדורים (ממוספרים) או אם הם זהים לחלוטין.

כאשר הכדורים שונים וניתן להכניס כל אחד מהם לכל אחד מהתאים אזי, כפי שכבר ראינו, מספר האפשרויות השונות הוא n^r .

כאשר הכדורים זהים אזי כל אפשרות נקבעת על-ידי כך שקובים את מספר הכדורים בתא הראשון, מספר הכדורים בתא השני וכן הלאה. נשתמש בפתרון הבעיה הקודמת (סידור a+b כדורים בשורה) באופן הבא:

n תאים נוצרים על-ידי $n + 1$ דפנות, מהן 1 דפנות פנימיות. כל פיזור של r הכדורים הזהים בתאים על-ידי סידור בשורה של r הכדורים ו- 1 הדפנות הפנימיות.

דוגמאות:

1. המודל של מקסוול-בולצמן.

n תיירים בוחרים באקראי בית מלון מתוך רשימה של m בתי מלון. חשב את ההסתברויות הבאות (לכל תשובה ציין תנאים מתאימים):

א. בכל אחד מ- n בתי מלון מסוימים תייר אחד בלבד.

ב. לכל היותר תייר אחד בכל מלון.

ג. n_1 תיירים במלון מספר 1, n_2 תיירים במלון מספר 2,.., n_m תיירים במלון מספר m.

2. המודל של בויס-איינשטיין.

ענה על סעיפים א׳ ג׳ כאשר אין אפשרות להבדיל בין התיירים.

3. לוטו

4. טוטו

5. קלפים.

4. הסתברות איחוד מאורעות

מהאדיטיביות של פונקצית ההסתברות אנו יודעים שאם $A_1, A_2, ... A_n$ מאורעות זרים בזוגות, $i \neq j \quad A_i \cap A_j = \phi$, אזי

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n)$$

וכן ראינו שכאשר A_1 ו-A_2 מאורעות כלשהם מתקיים :

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

הבעיה שנטפל בה היא חישוב ההסתברות של איחוד מספר סופי של מאורעות כלשהם,
ונתחיל בשלושה מאורעות A_1, A_2 ו-A_3. את מאורע האיחוד נציג בצורה

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$$

ונשתמש בנוסחה לאיחוד 2 מאורעות כדי לקבל את התוצאה:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

כשבידינו נוסחה לאיחוד 3 מאורעות נוכל לקבל נוסחה לאיחוד 4 מאורעות ובאינדוקציה
על n נקבל את הנוסחה הבאה.

<u>הסתברות איחוד מאורעות</u>

יהיו $A_1, A_2, ... A_n$ מאורעות, אזי

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n$$

כאשר:

סכום ההסתברויות של המאורעות $$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

סכום ההסתברויות של החיתוכים בזוגות $$S_2 = \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j)$$

סכום ההסתברויות של החיתוכים בשלשות $$S_3 = \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

.
.
.

סכום ההסתברויות של חיתוך k מאורעות $$S_k = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k})$$

.
.
.

הסתברות חיתוך n המאורעות $$S_n = P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

נדגיש שגם במקרה הפשוט ביותר של מרחבי הסתברות סימטריים, הנוסחה הזו חשובה מכיוון שהיא מאפשרת לחשב הסתברות במקרים שחישוב קומבנטורי בלתי אפשרי.

דוגמאות:

1. בעיית המזכירה הרשלנית.
2. זורקים n קוביות שונות. מה ההסתברות שכל אחד מהמספרים 1, 2, , 6 הופיע לפחות פעם אחת ($n \geq 6$). מה ההסתברות אם הקוביות זהות?
3. זורקים n קוביות. מה ההסתברות שבדיוק 5 מהמספרים 1, 2, , 6 מופיעים?
4. בכובע 3 פתקים עליהם רשומות הספרות 1, 2, 3. מוציאים מהכובע 6 פתקים עם החזרה. מה ההסתברות שכל אחת מהספרות הופיעה לפחות פעמיים ? ענה על השאלה בשני מקרים: א. כאשר יש חשיבות לסדר הופעת הספרות, ב. אין חשיבות לסדר.
5. 7 רצים משתתפים בתחרות. לכל רץ מספר על חולצתו מבין המספרים 1, 2, , 7. מה ההסתברות ש:

   א. הרץ שעל חולצתו מס' 1 יגיע במקום הראשון?

   ב. לפחות אחד יגיע במקום הרשום על חולצתו.

   ג. 4 רצים בדיוק יגיעו במקום הרשום על חולצתם.

   ד. 3 רצים בדיוק יגיעו במקום הרשום על חולצתם.

   (נחזור לסעיף ד' בפרק הבא הסתברות מותנה)