פרק 3 : הסתברות מותנית ואי-תלות

הקדמה

בניסוי מסוים נתונה לנו לפעמים אינפורמציה. אינפורמציה זו עשויה לשנות את ההסתברות של מאורע מסוים, כלומר נדון בהשפעה של התרחשות מאורע אחד על סיכויי ההתרחשות של מאורע שני.

דוגמא 1:

בכיתה מסוימת מספר שווה של גברים ונשים. כל הגברים מעשנים וכל הנשים אינן מעשנות.
נבחר אדם באופן מקרי, מה ההסתברות שהוא מעשן ? - ההסתברות היא ½ .
אם ידוע שהאדם הנבחר הוא גבר, מה ההסתברות שהוא מעשן ? - ההסתברות היא 1 .
אם ידוע שהאדם הנבחר הוא אישה, מה ההסתברות שהוא מעשן ? - ההסתברות היא 0 .
אנו רואים שלפני שאנו יודעים אם האדם שנבחר הוא גבר או אישה, היה עלינו לייחס לאפשרות שהוא מעשן, אך ברגע שאנו יודעים את מינו של האדם שנבחר, יש באינפורמציה זו כדי לשנות את ההסתברות לאפשרות שהוא מעשן. האינפורמציה הנוספת שהאדם הוא גבר משנה את הסתברות המאורע "האדם מעשן", או במלים אחרות :
הסתברות המאורע "האדם מעשן" תלויה בכך אם ידוע שה"אדם גבר".

דוגמא 2:

מטילים קוביה מאוזנת. מה ההסתברות שהופיעה התוצאה '2' ? - ההסתברות היא 1/6 .
אם ידוע שהופיעה בהטלה תוצאה זוגית, מה ההסתברות שהופיעה התוצאה '2' ? -
ההסתברות היא 1/3 . שוב אנו רואים שהאינפורמציה הנוספת ש"הופיעה תוצאה זוגית" משנה את הסתברות של המאורע "הופיעה התוצאה '2' " .

הסתברות מותנה אנו נתחיל בהנחה שקיים מרחב הסתברות (Ω, A, P) כלומר, יש לנו ניסוי מקרי שעבורו מוגדרים מרחב המדגם Ω , אוסף המאורעות A, ופונקצית ההסתברות P.
נתונים שני מאורעות A ו- B , נרצה להגדיר את ההסתברות המותנה של מאורע A בהינתן שמאורע B קרה.

הגדרה 1 הסתברות מותנה

יהיו A ו- B שני מאורעות באוסף המאורעות $\mathcal{A}$ של מרחב מדגם $(\Omega,\mathcal{A},P)$. ההסתברות המותנה של מאורע A בהינתן מאורע B , מסומנת ב- $P(A|B)$ ומוגדרת על-ידי

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

בתנאי $P(B)>0$, ואינה מוגדרת עבור $P(B)=0$.

הערה נוסחה ברורה מההגדרה היא: $P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)=P(B|A)\cdot P(A)$

אם $P(A),P(B)\neq 0$. (היא נקראת נוסחת הכפל ותורחב בהמשך ל n מאורעות)

הנוסחה הנ"ל גם מקשרת בין $P(A|B)$ ובין $P(B|A)$ במונחים של הסתברויות לא מותנות $P(A)$ ו- $P(B)$:

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$$

<u>דוגמא 3 :</u>

נניח ניסוי של זריקת 2 מטבעות. $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

ונניח לכל תוצאה אותה הסתברות. נמצא:

א. ההסתברות לקבלת 2 עצים נתון בהטלה ראשונה התקבל עץ.

ב. ההסתברות לקבלת 2 עצים נתון התקבל לפחות עץ אחד.

יהיו : A_1 = התקבל עץ בהטלה ראשונה, A_2 = התקבל עץ בהטלה שניה.

$$P(A_1\cap A_2|A_1)=\frac{P(A_1\cap A_2\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$$

$$P(A_1\cap A_2|A_1\cup A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$$

כשמדובר בהסתברות מותנית אנו מתנים במאורע נתון B, כלומר מניחים שהניסוי הסתיים בתוצאה השייכת ל-B. בעצם B הוא "מרחב מדגם חדש" ונשאלת השאלה: עבור מאורע נתון B שעבורו $P(B) > 0$ האם פונקצית ההסתברות המותנה $P(\bullet \mid B)$ היא פונקצית הסתברות לגיטימית? במילים אחרות, האם $P(\bullet \mid B)$ מקיימת את 3 האקסיומות של פונקצית הסתברות:

1. לכל מאורע $A \in \mathcal{A}$ מתקיים: $P(A \mid B) \geq 0$
2. $P(\Omega \mid B) = 1$
3. יהיו $A_1, A_2, A_3, \ldots$ מאורעות זרים בזוגות, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \phi$, אזי:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$$

(הוכחה בכתה).

תכונות פונקצית ההסתברות המותנה:

בגלל העובדה שפונקצית הסתברות היא פונקצית הסתברות לגיטימית, היא מקיימת את כל התכונות של פונקציה הסתברות:

א. $P(\phi \mid B) = 0$

ב. אם $A_1, A_2, \ldots A_n$ מאורעות זרים בזוגות אזי $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid B) = \sum_{i-1}^{n} P(A_i \mid B)$

(תכונת האדיטיביות הסופית)

ג. יהיו A_1, A_2 ו-B מאורעות במרחב הסתברות, כך ש $A_1 \subset A_2$ אזי $P(A_1 \mid B) \leq P(A_2 \mid B)$.

ד. לכל מאורע $A \in \mathcal{A}$ מתקיים: $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$

ה. לכל מאורע $A \in \mathcal{A}$ מתקיים: $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

ו. אם $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ אזי $P(A_1 \mid B) = P[(A_1 \cap A_2) \mid B] + P[(A_1 \cap \overline{A}_2) \mid B]$

ז. אם $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ אזי $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 \cap A_2 | B)$

ח. אם $A_1, A_2, \ldots A_n$ מאורעות כלשהם אזי $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i | B) \le \sum_{i-1}^{n} P(A_i | B)$

משפט 1 נוסחת ההסתברות השלמה

נתון מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. ויהיו $B_1, B_2, \ldots B_n$ חלוקה, כלומר n מאורעות זרים בזוגות, $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \phi$, המקיימים $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. יהי $A \subset \Omega$ מאורע, אזי:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

הוכחה: $A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$

מכיוון ש $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$, ו- $i = 1, 2, \ldots, n$, $A \cap B_i$ מאורעות זרים בזוגות:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

מסקנה:

עבור מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, אם B מאורע המקיים $0 < P(B) < 1$, אזי לכל מאורע A :

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})$$

הערה: נוסחת ההסתברות השלמה נכונה גם עבור $n = \infty$.

משפט 1 (והתוצאה הנובעת ממנו) שימושיים במיוחד עבור ניסיונות רב שלביים. דוגמא 4 שתובא להלן מתארת ניסיון כזה.

משפט 2 נוסחת בייס

נתון מרחב הסתברות (Ω, A, P), ויהיו $B_1, B_2, \ldots, B_n$ חלוקה כלומר, מאורעות זרים

בזוגות $B_i \cap B_j = \phi$ לכל $i \neq j$ המקיימים $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. ויהי $A \subset \Omega$ מאורע אזי:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)} \quad , k = 1, 2, \ldots, n$$

מסקנה:

עבור מרחב הסתברות (Ω, A, P), יהיו A ו- B מאורעות המקיימים $P(A) > 0$,

$0 < P(B) < 1$, אזי :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})}$$

הערה: נוסחת ההסתברות השלמה נכונה גם עבור $n = \infty$.

משפט 3 נוסחת הכפל

יהיו $A_1, A_2, \ldots A_n$ מאורעות במרחב הסתברות (Ω, A, P), המקיימים

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ אזי:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1})$$

נוסחת הכפל מתאימה במיוחד לחישוב הסתברויות של חיתוכי מאורעות בניסוי רב שלבי.

הערה: נוסחת הכפל היא בעצם הרחבה של הנוסחה $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$.

<u>דוגמא 4 :</u>

1. נתונים 5 כדים ממוספרים 5, . . . , 2 ,1. בכל כד 10 כדורים. בכד ה- i : i כדורים לבנים, ו i 10 כדורים אדומים. בוחרים כד באקראי ומוציאים ממנו כדור אחד.

   א. מה ההסתברות שהוצא כדור לבן מהכד ?

   ב. נתון שהוצא כדור לבן מהכד, מה ההסתברות שהכד הנבחר היה כד מס' i ?

<u>דוגמא 5 :</u>

לסטודנט שאלה אמריקאית עם 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה. הסטודנט יודע את התשובה בהסתברות p, ומנחש באקראי בהסתברות $1-p$. נתון שהסטודנט ענה נכון על השאלה, מה ההסתברות שידע את התשובה.

<u>דוגמא 6 :</u>

כד מכיל 10 כדורים מתוכם שלושה שחורים ו- 7 לבנים. משחקים במשחק הבא: בכל ניסוי בוחרים באקראי כדור, רושמים את צבעו ומחזירים אותו לכד עם עוד 2 כדורים מאותו הצבע. מה ההסתברות שבשלושת הניסיונות נבחר כדור שחור?

<u>דוגמא 7 :</u>

בכד 10 כדורים מתוכם 3 כדורים שחורים ו- 7 כדורים לבנים. מוציאים 5 כדורים בזה אחר זה ורושמים את צבעם. מה ההסתברות שהכדור ה- 4 שנדגם שחור כשידוע שבסך הכל נדגמו 2 כדורים שחורים? (אינטואיטיבית אנו מצפים שהתשובה תהיה 2/5). נדון בשני מקרים:

א. כאשר הדגימה עם החזרה

ב. כאשר הדגימה ללא החזרה

<u>דוגמא 8 : (הכללה של דוגמא 7)</u>

בכד M כדורים מתוכם K שחורים ו- $M-K$ לבנים. מוציאים n כדורים בזה אחר זה ורושמים את צבעם. מה ההסתברות שהכדור ה- j שנדגם שחור נתון שבסך הכל נדגמו k כדורים שחורים? (אינטואיטיבית אנו מצפים שהתשובה תהיה k/n) . נדון בשני מקרים:

ג. כאשר הדגימה עם החזרה

ד. כאשר הדגימה ללא החזרה

<u>דוגמא 9 :</u>

7 רצים משתתפים בתחרות. לכל רץ מספר על חולצתו מבין המספרים 1, 2, , 7. מה ההסתברות ש:

א. 3 רצים בדיוק יגיעו במקום הרשום על חולצתם.

ב. k רצים בדיוק יגיעו במקום הרשום על חולצתם.