אי תלות של מאורעות

בדיון על הסתברות מותנה הבחנו ההסתברות P(A) שמאורע A יקרה, לבין ההסתברות שמאורע A יקרה כאשר ידוע שמאורע B קרה. שתי הסתברויות אלה שונות בדרך כלל זו מזו, אולם ישנם מקרים בהם ההסתברויות האלו שוות. למשל, בהטלה אחת של קוביה, אם A ו- B הם המאורעות:

$$A = \{ 2 , 4 , 6 \} \qquad B = \{ 1, 2 \}$$

אזי וכן גם . במקרה זה העובדה שמאורע B קרה אינה משנה את ההסתברות של מאורע A לקרות, ואנו נוטים לומר ש ' A לא תלוי ב- B '. כלומר, נראה טבעי לומר שמאורע A לא תלוי במאורע B אם . נקבל מכאן את ההגדרה הבאה.

הגדרה 2 מאורעות בלתי תלויים

יהיו A ו- B מאורעות במרחב הסתברות. A ו- B נקראים 'מאורעות בלתי תלויים' אם לפחות אחד משלושת התנאים הבאים מתקיימים:

1.

2. אם $P(B) > 0$.

3. אם $P(A) > 0$.

הערות

1. אין לבלבל בין המושגים 'מאורעות בלתי תלויים' ו'מאורעות זרים'. יותר מכך, מאורעות זרים בעלי הסתברויות חיוביות הם מאורעות תלויים.
2. מושג אי התלות בין שני מאורעות הוא מושג סימטרי. A בלתי תלוי ב-B אז גם B בלתי תלוי ב- A כלומר, מקיום השוויון: נובעים גם שלושת השוויונות הבאים (נא להוכיח): , ,

   .
3. המאורע הריק ϕ והמאורע הודאי Ω אינם תלויים במאורע אחר. (ϕ לא קורה לעולם, Ω קורה תמיד).

ההגדרה שניתנה לעיל מתייחסת לזוג מאורעות A ו-B. נרחיב את מושג אי התלות ליותר משני מאורעות. נניח עתה כי נתונים שלושה מאורעות A, B ו-C במרחב הסתברות. נשאלת השאלה, מתי נאמר כי שלושת המאורעות בלתי תלויים? ברור כי דרוש ש:

כלומר שהמאורעות יהיה בלתי תלויים בזוגות. התנאים הנ"ל אינם מספיקים מכיוון שאי תלות בזוגות אינה גוררת אי תלות.

<u>דוגמא 10 :</u>

מטילים קוביה פעמיים. יהיו A, B ו-C המאורעות הבאים:

A = הופיעה תוצאה אי-זוגית בהטלה ראשונה

B = הופיעה תוצאה אי-זוגית בהטלה שניה

C = סכום התוצאות הוא אי-זוגי

, ומכיוון ש A ו-B מתייחסים להטלות השונות ברור כי A ו-B בלתי תלויים. המאורע C קורה רק אם התוצאה בהטלה אחת זוגית ובשניה אי זוגית, ולכן , כלומר A ו-C וכן B ו-C בלתי תלויים. יחד עם זאת, אם ידוע ש-C קרה, לא יתכן ש A ו-B יקרו כי . כלומר המאורעות A, B ו-C תלויים. מכאן שיש להגדיר אי תלות של מספר מאורעות.

הגדרה 3 אי תלות של n מאורעות

יהיו מאורעות במרחב הסתברות . נאמר כי המאורעות הם מאורעות בלתי תלויים אם ורק אם:

<u>סדרה של מאורעות בלתי תלויים</u>

בעיות רבות בהסתברות קשורות בסדרה של ניסויים בלתי תלויים, שכל אחד מהם יכול להסתיים באחת משתי תוצאות אפשריות שנציין אותן ב "הצלחה" או "כשלון". למשל כאשר מטילים מטבע מספר פעמים: כל הטלה יכולה להסתיים ב'עץ' או 'פלי', ודי סביר להניח כי תוצאות ההטלות השונות בלתי תלויות. כל ניסוי בסדרה נקרא ניסוי ברנולי.

ניסוי ברנולי ניסוי היכול להסתיים באחת משתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" או "כשלון". ההסתברות שהניסוי יסתיים ב"הצלחה" מסומנת בדרך כלל ב p , וההסתברות שיסתיים ב"כשלון" מסומנת בדרך כלל ב q , כאשר $p + q = 1$, $q \geq 0$, $p \geq 0$.

נניח כעת שמבצעים סדרה של n ניסויי ברנולי בלתי תלויים. כשמדברים על 'סדרה' מתכוונים לכך שההסתברות ל "הצלחה" או "כשלון" בכל ניסוי נשארת קבועה.
אם נסמן "הצלחה" ב- 1 , ו"כשלון" ב- 0 , מרחב המדגם Ω, המכיל 2^n תוצאות שונות ניתן לתיאור באופן הבא:

וההסתברות של כל תוצאה אפשרית (נקודת מדגם) היא:

מכיוון ש שווה למספר ה- '1' , ו- שווה למספר ה- '0' .

כל ניסוי אקראי שבו אנו מתייחסים לעובדה האם מאורע מסוים A , שהסתברותו p , קרה או לא קרה הוא ניסוי ברנולי. לדוגמא, אם הניסוי הוא הטלת 2 קוביות הוגנות, A יכול להיות המאורע "סכום התוצאות הוא 7" והסתברותו ; או 3 אנשים מטילים בעת ובעונה אחת מטבעות הוגנות ו- A הוא המאורע "שלושתם קבלו אותה התוצאה" , שהסתברותו
;

לעיתים, העובדה היחידה שמעניינת אותנו כשמבצעים סידרה של n ניסויי ברנולי היא מספר ההצלחות. נגדיר מאורע: = "מספר ההצלחות היה k" ונחשב את הסתברותו עבור כל מספר שלם $k = 0, 1, . . . , n$.
מספר הפעמים שהמאורע " k הצלחות ב- n הניסויים" קורה שווה למספר האפשרויות לסידור k '1' בשורה של n מקומות. כלומר, יש תוצאות אפשריות (נקודות מדגם)

המכילות בדיוק k הצלחות ו- כישלונות. ההסתברות של כל נקודת מדגם כזו היא , ומכאן נקבל ש:

המאורעות עבור $k = 0, 1, \ldots, n$ הם מאורעות זרים בזוגות, שאיחודם הוא כל מרחב המדגם. לכן:

ואכן, לפי נוסחת הבינום של ניוטון:

<u>דוגמא 11</u>

ההסתברות שלסוג מסוים של עץ יהיו n פרחים, היא עבור $n = 0, 1, 2, \ldots$.
לכל פרח יש הסתברות 2/3 ליצור פרי באופן בלתי בפרחים האחרים על העץ. לכל פרי יש הסתברות ¼ להיאכל על ידי ציפורים לפני שיבשיל. הראה כי הסתברות שלעץ היו n פרחים אם הופיעו r פירות בשלים היא:

רמז: