

3.2 משתנים מקריים רציפים

הגדרה 7 משתנה מקרי רציף

משתנה מקרי X נקרא משתנה מקרי רציף אם קיימת פונקציה $f_X(x)$ כך ש -

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

משתנה מקרי רציף X נקראת רציפה בהחלט.

הגדרה 8 פונקצית צפיפות של משתנה מקרי רציף

אם X משתנה מקרי רציף, הפונקציה $f_X(\cdot)$ שב - $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$ נקראת פונקצית

הצפיפות של X .

משפט 2

יהי X משתנה מקרי רציף. ניתן לקבל את $F_X(\cdot)$ מתוך $f_X(\cdot)$ ולהפך.

הוכחה

יהי X משתנה מקרי רציף ונניח שהפונקציה $f_X(\cdot)$ נתונה אזי $F_X(x)$ מתקבלת ע"י

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

ולהפך, נניח ש $F_X(\cdot)$ נתונה אזי ניתן לקבל את $f_X(x)$ ע"י גזירה, כלומר

$$f_X(x) = dF_X(x)/dx$$

נשים לב שלפונקצית ההסתברות $P_X(x)$ ולפונקצית הצפיפות $f_X(x)$ אין אותה

המשמעות. עבור משתנה מקרי בדיד $P_X(x) = P(X = x)$ כלומר ההסתברות שהמשתנה

המקרי X יקבל את הערך X .

עבור משתנה מקרי רציף, $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F_X(x+dx) - F_X(x)}{dx}$ מכאן

$$f_X(x) \cdot dx \approx F_X(x+dx) - F_X(x) = P(x < X \leq x+dx)$$

באינטרוול קטן המכיל את הערך x שווה ל- $f_X(x)$ כפול רוחב האינטרוול. עבור משתנה

מקרי בדיד $P_X(\cdot)$ היא פונקציה שהתחום שלה הוא הישר הממשי והטווח שלה הוא הקטע

$[0,1]$, בעוד שעבור משתנה מקרי רציף $f_X(\cdot)$ היא פונקציה שהתחום שלה הוא הישר

הממשי והטווח שלה הוא האינטרוול האינסופי $[0, \infty)$.

דוגמא 7

יהי X משתנה מקרי המתאר את אורך שיחת טלפון. נניח כי המודל המתאים לתיאור התפלגות X נתון על-ידי

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

כאשר λ מספר חיובי כלשהו.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פונקצית הצפיפות המתאימה נתונה על-ידי:

אם נניח ששיחות טלפון נמדדות בדקות, אזי:

$$P(5 < X \leq 10) = \int_5^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-5\lambda} - e^{-10\lambda}$$

$$P(5 < X \leq 10) = F_X(10) - F_X(5) = (1 - e^{-10\lambda}) - (1 - e^{-5\lambda}) = e^{-5\lambda} - e^{-10\lambda}$$

ועבור $\lambda = 1/5$ ההסתברות היא: $e^{-1} - e^{-2} \cong 0.23$

משתמשים בפונקצית הצפיפות לצורך חישוב הסתברויות של מאורעות המוגדרים במונחים של המשתנה המקרי המתאים, בדוגמא שלעיל חשבנו את ההסתברות ששיחת טלפון תמשך בין 5 ל-10 דקות.

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

כללית:

הגדרה 9 פונקצית צפיפות

כל פונקציה $f(\cdot)$ שהתחום שלה הוא הישר הממשי והטווח שלה הוא $[0, \infty)$ מוגדרת להיות פונקצית צפיפות של משתנה מקרי אם ורק אם:

$$1. \quad f(x) \geq 0 \quad \text{לכל } x \text{ ממשי.}$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

הגדרה זו מאפשרת לנו להשתמש במונח "פונקצית צפיפות" מבלי להתייחס למשתנה מקרי מסוים. נשים לב שפונקצית הצפיפות של מ"מ רציף, כמו שהוגדרה בהגדרה 8 מקיימת את שתי התכונות האלה.