דוגמא 15

יהי X משתנה מקרי רציף בעל פונקצית הצפיפות הבאה: $(\lambda > 0)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad t < \lambda$$

$$M'_X(t) = \frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \quad \text{ולכן} \quad M'_X(0) = E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$M''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \quad \text{ולכן} \quad M''_X(0) = E[X^2] = \frac{1}{\lambda^2}$$

דוגמא 16

יהי X משתנה מקרי בעל פונקצית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x > 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(ראה דוגמה 12). אם פונקציה יוצרת מומנטים הייתה קיימת אז היא הייתה נתונה על-ידי $\int_1^\infty e^{tx} \cdot \frac{1}{x^2}dx$. ניתן להראות כי האינטגרל לא קיים לכל $t > 0$, ולכן פונקציה יוצרת מומנטים לא קיימת למשתנה המקרי X הזה.

הגדרה **17** פונקציה יוצרת מומנטים פקטוריאליים (פונקציה יוצרת הסתברות)

יהי X משתנה מקרי. פונקציה יוצרת מומנטים פקטוריאליים (פונקציה יוצרת הסתברות) מסומנת ב $G_X(t)$ ושווה ל- $G_X(t) = E[t^X]$.

משתמשים בפונקציה יוצרת מומנטים פקטוריאליים לקבלת מומנטים באותו אופן כמו בפונקציה יוצרת מומנטים, מלבד העובדה שיש להשאיף את t ל- 1 במקום ל-0 . לעיתים קל יותר למצוא מומנטים באמצעות פונקציה זו במקרה של התפלגויות בדידות.

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_x t^x P_X(x)$$

$$\frac{d^r}{dt^r}G_X(t) = \sum_x [x(x-1)\cdots(x-r+1)]t^{x-r}P_X(x)$$

ובנקודה $t = 1$ נמצא כי

$$\frac{d^r}{dt^r}G_X(1) = E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$$

אמרנו כבר שהפונקציה נקראת גם פונקציה יוצרת הסתברות. ניתן להשתמש ב $G_X(t)$ למציאת הסתברויות של משתנים מקריים בדידים המקבלים ערכים שלמים לא-שליליים.
יהי X משתנה מקרי המקבל ערכים שלמים לא שליליים אזי:

$$G_X(t)=E[t^X]=\sum_{x=0}^{\infty}t^xP_X(x)=t^0P(X=0)+t^1P(X=1)+t^2P(X=2)+t^3P(X=3)+\ldots$$
$$=P(X=0)+tP(X=1)+t^2P(X=2)+t^3P(X=3)+\ldots$$

מכאן אנו רואים ש: $G_X(0)=P(X=0) \qquad G_X(1)=1$

$$\frac{d^r}{dt^r}G_X(0)=r!\cdot P(X=r)$$

ולכן : $P(X=r)=\dfrac{\frac{d^r}{dt^r}G_X(0)}{r!}$.

משפט **6** : משפט היחידות

יהיו X ו-Y שני משתנים מקריים בעלי פונקציות צפיפות (הסתברות) $f_X(\cdot)$ ו- $f_Y(\cdot)$ בהתאמה. נניח כי $M_X(t)$ ו- $M_Y(t)$ קיימות ושוות לכל t באינטרוול מסוים $-h<t<h$ עבור $h>0$ כלשהו. אזי שתי פונקציות ההתפלגות $F_X(\cdot)$ ו- $F_Y(\cdot)$ שוות.
את המשפט הנ"ל לא נוכיח. חשוב לשים לב למשמעותו, המשפט אומר שאם נוכל למצוא פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי אזי נוכל למצוא את ההתפלגות של המשתנה המקרי הזה מאחר שקיימת רק פונקצית התפלגות אחת לפונקציה יוצרת מומנטים נתונה. (קיימת התאמה 1-1 בין פונקצית יוצרת מומנטים ופונקצית התפלגות).

<u>דוגמא **17**</u>

נניח שלמשתנה מקרי X פונקציה יוצרת מומנטים הבאה : $-1<t<1 \qquad M_X(t)=\dfrac{1}{1-t}$

אנו יודעם כי הצפיפות של X נתונה על-ידי:

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

מאחר שהראנו בדוגמא 15 שאם פונקצית הצפיפות של משתנה מקרי X היא:

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

אזי $M_X(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$.

דוגמא 18

נניח שלמשתנה מקרי Y פונקציה יוצרת מומנטים הבאה :

$$M_Y(t)=\frac{1}{6}+\frac{5}{18}e^t+\frac{2}{9}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{3t}+\frac{1}{9}e^{4t}+\frac{1}{18}e^{5t}$$

מכאן אנו יודעים כי המ"מ Y מקבל את הערכים 0, 1, 2, 3, 4, 5 ופונקצית ההסתברות שלו היא הבאה :

y	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$P_Y(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

או -

y	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$P_Y(y)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

כלומר Y מתפלג כמו הערך המוחלט של ההפרש בין תוצאות הטלה של שתי קוביות.