פרק 5 : משתנים מקריים חד-ממדיים מיוחדים

1 הקדמה

המטרה בפרק זה להכיר משפחות פרמטריות מסוימות של פונקציות הסתברות או צפיפות של משתנים מקריים חד-ממדיים שיש להם שמות סטנדרטיים. משפחה פרמטרית מסוימת של פונקציות הסתברות או צפיפות היא אוסף של פונקציות המזוהות על ידי קבוע הנקרא פרמטר. לדוגמא, תהי $x > 0$, $f_X(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, כאשר $\lambda > 0$, אזי לכל $\lambda > 0$ הפונקציה $f_X(\cdot;\lambda)$ היא פונקצית צפיפות. λ הוא הפרמטר, ועבור כל ערכי λ החיוביים, האוסף $\{f_X(\cdot;\lambda):\lambda > 0\}$ הוא משפחה פרמטרית של פונקציות צפיפות.

2 התפלגויות בדידות

2.1 התפלגות אחידה בדידה

הגדרה 1 התפלגות אחידה בדידה

נאמר כי משתנה מקרי בדיד X מפולג אחיד עם פרמטרים $[1, N]$, כאשר N מספר שלם חיובי, ונסמן $X \sim U[1,N]$ אם ל- X פונקצית ההסתברות הבאה:

$$P_X(x) = P_X(x;N) = \begin{cases} \frac{1}{N} & x = 1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

דוגמא 1 הניסוי: זריקת קוביה הוגנת.

X = התוצאה בקוביה אזי $X \sim U[1,6]$. (לתאר בגרף את פונקצית ההסתברות).

משפט 1 אם $X \sim U[1,N]$, אזי

$$E(X) = \frac{N+!}{2} \quad , \quad V(X) = \frac{N^2-!}{12} \quad , \quad M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} e^{it}$$

הערה

בהתפלגות אחידה מתקבלים כל הערכים באותה הסתברות. ניתן להגדיר התפלגות אחידה בין כל שני מספרים שלמים ובלבד שהמשתנה המקרי יקבל כל ערך שלם בקטע בהסתברות הזו. במקרה זה יש להתאים את הנוסחאות שבמשפט 1 .

2.2 התפלגות ברנולי והתפלגות בינומית

הגדרה 2 התפלגות ברנולי

נאמר כי משתנה מקרי בדיד X מפולג ברנולי, עם פרמטר p, ונסמן $X \sim B(1,p)$
אם ל- X פונקצית ההסתברות הבאה:

$$P_X(x) = P_X(x\,;p) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר הפרמטר p מקיים $0 \le p \le 1$. 1-p מסומן לעיתים באות q .

משתנה מקרי ברנולי סופר את מספר ההצלחות בניסוי ברנולי אחד.

משפט 2 אם $X \sim B(1,p)$, אזי

$$E(X) = p \quad , \quad V(X) = pq \quad , \quad M_X(t) = pe^t + q$$

הגדרה 3 התפלגות בינומית

נאמר כי משתנה מקרי בדיד X מפולג בינומית, עם פרמטרים n ו- p,
ונסמן $X \sim B(n,p)$ אם ל- X פונקצית ההסתברות הבאה:

$$P_X(x) = P_X(x\,;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} & x = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר שני הפרמטרים n ו- p, מקיימים $0 \le p \le 1$, n מספר שלם חיובי ו- q=1-p.

משתנה מקרי בינומי סופר את מספר ההצלחות ב n ניסויי ברנולי בלתי תלויים.

משפט 3 אם $X \sim B(n,p)$, אזי

$$E(X) = np \quad , \quad V(X) = npq \quad , \quad M_X(t) = (pe^t + q)^n$$

דוגמא 2 X = מספר הניחושים הנכונים בטופס טוטו, $X \sim B(16,1/3)$

דוגמא 3 בכד M כדורים מתוכם K שחורים ו- M-K לבנים. מוציאים n כדורים עם החזרה. נגדיר X = מספר הכדורים השחורים במדגם. אזי $X \sim B(n, \frac{K}{M})$,

פונקצית ההסתברות של X נתונה על ידי:

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{K}{M}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{K}{M}\right)^{n-x} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(זו דוגמא 8 מפרק 3)

משפט 4 יהי $X \sim B(n,p)$, אזי

$P_X(x-1; n, p) < P_X(x; n, p)$ עבור $x < (n+1)p$

$P_X(x-1; n, p) > P_X(x; n, p)$ עבור $x > (n+1)p$

$P_X(x-1; n, p) = P_X(x; n, p)$ אם $x = (n+1)p$ ו- $(n+1)p$ הוא מספר שלם,

כאשר x מקבל ערכים n , . . . ,2 ,1.

2.3 התפלגות היפרגאומטרית

הגדרה 4 התפלגות היפרגאומטרית נאמר כי משתנה מקרי בדיד X מפולג היפרגאומטרית, עם פרמטרים M , K ו- n , ונסמן $X \sim H(M,K,n)$ אם ל- X פונקצית ההסתברות הבאה:

$$P_X(x) = P_X(x; M, K, n) = \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{x} \cdot \binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר M מספר שלם חיובי, K מספר שלם לא שלילי הקטן/שווה M, ו- n מספר שלם חיובי הקטן/שווה M .

משתנה מקרי היפרגאומטרי סופר את מספר הפריטים מסוג א' במדגם מגודל n שנלקח מאוכלוסייה מגודל M, מתוכה K פריטים מסוג א' והיתר M-K מסוג ב' .

משפט 5 אם $X \sim H(M,K,n)$, אזי

$$E(X) = n \cdot \frac{K}{M} \quad , \quad V(X) = n \cdot \frac{K}{M} \cdot \frac{M-K}{M} \cdot \frac{M-n}{M-1}$$

הערה אם נציב $p = K/M$, אז התוחלת של התפלגות היפרגאומטרית מתלכדת עם התוחלת של התפלגות בינומית, והשונות של התפלגות היפרגאומטרית היא $(M-n)/(M-1)$ פעמים השונות של התפלגות בינומית.

דוגמא 4 בכד M כדורים מתוכם K שחורים ו- M-K לבנים. מוציאים n כדורים מהכד בלי החזרה. נגדיר X = מספר הכדורים השחורים במדגם. אזי $X \sim H(M,K,n)$ (זו דוגמא 8 מפרק 3)

דוגמא 5 לוטו.

2.4 התפלגות פואסון

הגדרה 5 התפלגות פואסונית נאמר כי משתנה מקרי בדיד X מפולג פואסונית עם פרמטר λ, ונסמן $X \sim P(\lambda)$, אם ל- X פונקצית ההסתברות הבאה:

$$P_X(x) = P_X(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר הפרמטר $\lambda > 0$.

משפט 6 אם $X \sim P(\lambda)$, אזי

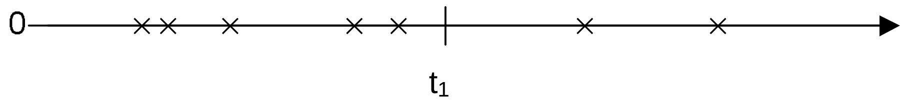
$$E(X) = \lambda \quad , \quad V(X) = \lambda \quad , \quad M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

ההתפלגות הפואסונית מספקת מודל ריאליסטי להרבה תופעות אקראיות. מכיוון שהערכים שהמ"מ הפואסוני מקבל הם השלמים החיוביים, כל תופעה אקראית עבורה ספירה מסוג מסוים באה בחשבון היא מועמדת למידול על ידי הנחת התפלגות פואסונית. ספירה כזו יכולה להיות מספר תאונות הדרכים בצומת מסוים בשבוע, מספר שיחות טלפון המגיעות למרכזיה ביחידת זמן, מספר החלקיקים הנפלטים מחומר רדיואקטיבי ליחידת זמן וכו'. ברור שלא כל תופעות הספירה ניתנות לתיאור באמצעות המודל הפואסוני, אבל אם הנחות מסוימות הנוגעות לתופעה מתקיימות, המודל הפואסוני מתאים.

נניח עתה כי אנו צופים במופעים (אירועים) הקורים בזמן, בחלל, בשטח או באורך. מופע יכול להיות תאונה, הגעה של שיחה למרכזיה, פליטה של חלקיק וכו'. נדבר על

תופעות הקורות בזמן למרות שתופעות הקורות בחלל בשטח או באורך מתאימות באותה מידה.

תופעה הקורית לאורך זמן ניתנת לתיאור בסקיצה הבאה:



מופע מיוצג ע"י $\times$, הגרף מראה ש 5 מופעים קרו בין זמן 0 וזמן t_1 . נניח כעת כי קיים גודל חיובי λ, המקיים את התנאים הבאים:

א. ההסתברות כי בדיוק מופע אחד יקרה באינטרוול זמן קטן באורך h היא בקירוב $\lambda \cdot h$, או $P(\text{one happening in interval of length } h) = \lambda h + o(h)$

ב. ההסתברות שיקרה יותר ממופע אחד באינטרוול זמן קטן באורך h זניחה ביחס להסתברות שיקרה בדיוק מופע אחד באינטרוול זמן מאותו אורך,
או $P(\text{two or more happening in interval of length } h) = o(h)$

ג. מספר המופעים באינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

המונח $o(h)$, אותו אנו קוראים "פונקציה כלשהי מסדר קטן יותר מ- h" , מציינת פונקציה לא מסוימת המקיימת $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$.

הגודל λ, ניתן אז לפירוש כקצב המופעים ליחידת זמן.

משפט 7 אם ההנחות שלעיל מתקיימות אזי מספר המופעים הקורים באינטרוול זמן באורך t מפולג פואסונית עם פרמטר λt . או אם המשתנה המקרי $X(t)$ מציין את מספר המופעים הקורים באינטרוול זמן באורך t, אזי $X(t) \sim P(\lambda t)$, וההסתברות

$$x = 0, 1, 2, \ldots \quad , \quad P[X(t) = x] = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \; .$$

נראה שתי דרכים להוכיח את המשפט, שתיהן לא מדי מסובכות.

דוגמא 6 נניח שהמספר הממוצע של שיחות המגיעות למרכזית טלפונים של חברה קטנה הוא 30 שיחות לשעה.

א. מה ההסתברות שלא תגיע שיחה במשך 3 דקות?

ב. מה ההסתברות שתגענה יותר מ 2 שיחות באינטרוול זמן של 5 דקות?

2.5 התפלגות גיאומטרית ובינומית שלילית

נדון בהתפלגות הגיאומטרית (או פסקל) והבינומית שלילית יחד משתי סיבות: הראשונה היא שההתפלגות הגיאומטרית היא מקרה פרטי של התפלגות בינומית שלילית, והשניה הוא שסכום של משתנית מקריים בלתי תלויים המפולגים גיאומטרית מתפלג בינומית שלילית, כמו שנראה בפרק 6. בפיסקה 3.3 של פרק זה נגדיר את ההתפלגות המעריכית והתפלגות גאמא ונראה שמבחינות מסוימות ההתפלגות הגיאומטרית והבינומית שלילית הן האנלוגים הבדידים של ההתפלגות המעריכית והתפלגות גאמא.

הגדרה 6 התפלגות גאומטרית נאמר כי משתנה מקרי בדיד X מפולג גיאומטרית עם פרמטר p, ונסמן $X \sim G(p)$, אם ל- X פונקצית ההסתברות הבאה:

$$P_X(x) = P_X(x;p) = \begin{cases} q^{x-1} \cdot p & x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר הפרמטר p מקיים $0 < p \le 1$, $q = 1-p$.

משתנה מקרי גיאומטרי סופר את מספר ה<u>ניסיונות</u> עד להצלחה ראשונה בסדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים.

משפט 8 אם $X \sim G(p)$, אזי

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad , \quad V(X) = \frac{q}{p^2} \quad , \quad M_X(t) = \frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}$$

לעיתים סופרים את מספר ה<u>כישלונות</u> עד להצלחה ראשונה בסדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים. משתנה מקרי זה נקרא מ"מ פסקל, פונקצית ההסתברות שלו נתונה על ידי:

$$P_X(x) = P_X(x;p) = \begin{cases} q^{x} \cdot p & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ואז $E(X) = \frac{q}{p} \quad , \quad V(X) = \frac{q}{p^2} \quad , \quad M_X(t) = \frac{p}{1 - q \cdot e^t}$.

ההתפלגות הגיאומטרית נקראת גיאומטרית בצדק מכיוון שערכיה הם אברי טור גיאומטרי. השכיח של ההתפלגות הוא בהכרח 1 (או 0 בהתפלגות פסקל). להתפלגות הגיאומטרית תכונה מיוחדת הנקראת תכונת חוסר הזיכרון, שתוגדר במשפט הבא.

משפט 9 תכונות חוסר הזיכרון אם X מפולג גיאומטרית עם פרמטר p, אזי

$$P(X > t+s \mid X > s) = P(X > t) \quad \text{לכל} \quad s,t = 0, 1, 2, \ldots$$

נשים לב שאם $X \sim G(p)$ אזי $P(X > k) = q^k$ ומכאן ההוכחה ברורה. משפט 9 אומר שההסתברות המותנה שיידרשו יותר מ t+s ניסיונות עד הצלחה ראשונה כשנתון ש s הניסיונות הראשונים הסתיימו בכישלון שווה להסתברות הלא מותנה שמספר הניסיונות עד הצלחה ראשונה יהיה גדול מ t. כלומר, העובדה שכבר ראינו s כישלונות לא שינתה את התפלגות מספר הניסיונות הנדרשים עד הצלחה ראשונה.

דוגמא 7 מטילים קוביה הוגנת עד שלראשונה מתקבלת התוצאה '6' .

א. מה ההסתברות שנטיל את הקוביה 5 פעמים?

ב. מה ההסתברות שנטיל את הקוביה לכל היותר 5 פעמים?

ג. הקוביה הוטלה פעמיים והתוצאה '6' לא התקבלה. מה ההסתברות שנטיל את הקוביה לכל היותר 5 פעמים?

הגדרה 7 התפלגות בינומית שלילית נאמר כי משתנה מקרי בדיד X מפולג בינומית שלילית עם פרמטרים r ו- p, ונסמן $X \sim NB(r,p)$, אם ל- X פונקצית ההסתברות הבאה:

$$P_X(x) = P_X(x;p) = \begin{cases} \binom{x+r-1}{r-1} p^r q^{x-r} & x = r, r+1, r+2, \ldots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר הפרמטר p מקיים $0 < p \le 1$, $q = 1-p$.

משתנה מקרי בינומי שלילי סופר את מספר ה<u>ניסיונות</u> עד להצלחה מספר r בסדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים.

משפט 10 אם $X \sim NB(r,p)$, אזי

$$E(X) = \frac{r}{p} \quad , \quad V(X) = \frac{rq}{p^2} \quad , \quad M_X(t) = \left(\frac{p \cdot e^t}{1 - q \cdot e^t}\right)^r$$

לעיתים סופרים את מספר הכישלונות עד להצלחה מספר r בסדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים. פונקצית ההסתברות של משתנה מקרי זה נתונה על ידי:

$$P_X(x) = P_X(x;r,p) = \begin{cases} \binom{x+r-1}{x} q^x \cdot p^r & x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ואז $M_X(t) = \left(\dfrac{p}{1-q\cdot e^t}\right)^r \quad , \quad V(X) = \dfrac{rq}{p^2} \quad , \quad E(X) = \dfrac{rq}{p}$.

משתנה מקרי בינומי שלילי, כמו מ"מ פואסוני, מקבל ערכים שלמים חיוביים (או לא שליליים), לכן ההתפלגות הבינומית שלילית מועמדת לשמש מודל עבור ניסיון אקראי שעבורו ספירה מסוג מסוים באה בחשבון. ואכן משתמשים בהתפלגות הבינומית שלילית במודלים של ספירת אוכלוסייה, בבריאות, בקומוניקציה ועוד. שלא כמו בהתפלגות הפואסונית, שם התוחלת והשונות שוות, בהתפלגות בינומית שלילית השונות גדולה יותר מאשר התוחלת.

הערה: נשים לב לשקילות המאורעות הבאים:

{נדרשו יותר מ- k ניסיונות עד הצלחה r} =

{ב-k הניסיונות הראשונים היו לכל היותר r-1 הצלחות}

כלומר: אם $X \sim NB(r,p)$ ו- $Y \sim B(k,p)$ אזי $P(X > k) = P(Y \le r\text{-}1)$.

2.6 התפלגויות בדידות אחרות