3 התפלגויות רציפות

3.1 התפלגות אחידה רציפה

הגדרה 8 התפלגות אחידה רציפה נאמר כי משתנה מקרי רציף X מפולג אחיד עם פרמטרים a ו- b, ונסמן $X \sim U(a,b)$ אם ל- X פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = f_X(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר הפרמטרים a ו- b, מקיימים $-\infty < a < b < \infty$.

(לתאר בגרף את פונקצית הצפיפות ופונקצית ההתפלגות המצטברת).

דוגמא 8 קבלן יודע מניסיון העבר כי ההצעה הנמוכה ביותר במכרז על פרויקט מסוים (לא כולל ההצעה שלו) היא מ"מ המפולג אחיד בקטע $(0.75C\ ,\ 2C)$, כאשר C הוא אומדן ההוצאות שלו בפרויקט (בלי רווח ובלי הפסד). אם נגדיר רווח = 0 אם הקבלן לא זוכה במכרז (הצעתו גבוהה מההצעה הנמוכה ביותר) ורווח = ההפרש בין ההצעה שלו וההוצאות בפרויקט, כמה עליו להציע על מנת להביא למקסימום את תוחלת הרווח?

משפט 11 אם $X \sim U(a,b)$, אזי

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad , \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad , \quad M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

3.2 התפלגות נורמלית

הגדרה 9 התפלגות נורמלית נאמר כי משתנה מקרי רציף X מפולג נורמלית עם פרמטרים μ ו- σ^2, ונסמן $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ אם ל- X פונקצית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = f_X(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

כאשר פרמטרים μ ו- σ^2 , מקיימים $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$. אנו משתמשים בסימונים μ ו- σ^2 לייצג את הפרמטרים בגלל, שכמו שנראה, הם התוחלת והשונות של ההתפלגות בהתאמה.

לצפיפות הנורמלית צורת פעמון סימטרית ל μ, סטית התקן σ קובעת את רוחב העקומה.

עבור כל התפלגות נורמלית מתקיים:

$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \cong 0.68$$
$$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \cong 0.95$$
$$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \cong 1$$

לצפיפות הנורמלית אין אינטגרל לא מסוים ולכן מציגים את פונקצית ההתפלגות המצטברת של מ"מ נורמלי באמצעות טבלה. הטבלה מייצגת את פונקצית ההתפלגות המצטברת של מ"מ נורמלי סטנדרטי שהוא מקרה פרטי של התפלגות נורמלית.

התפלגות נורמלית סטנדרטית מקרה פרטי של התפלגות נורמלית, שבה $\sigma=1$, $\mu=0$. משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי מסומן באות Z. גם להתפלגות המצטברת של משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי סימון מיוחד: $P(Z \le z)=\Phi(z)$.
הטבלה של התפלגות נורמלית סטנדרטית נותנת את הערכים של $\Phi(z)$.

תכונות בסיסיות של $\Phi(\cdot)$:

א. $\Phi(0)=0.5$

ב. $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$

משפט 12 אם $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ אזי , $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

או - אם $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ אזי , $P(a<X<b)=\Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

המשפט הנ"ל מאפשר לנו לחשב הסתברויות של משתנה מקרי נורמלי כלשהו, תוך שימוש בטבלת התפלגות נורמלית סטנדרטית.

דוגמא 9 קוטר של מכסה המיוצר ע"י מכונה הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 10 ס"מ וסטית תקן 0.1 ס"מ . אם ניתן להשתמש רק במכסים שקוטרם בין 9.9 ס"מ ו- 10.2 ס"מ, באיזה אחוז של המכסים יעשה שימוש?

פתרון

$$P(9.9<X<10.2)=\Phi\left(\frac{9.9-10}{0.1}\right)-\Phi\left(\frac{10.2-10}{0.1}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=$$
$$=0.9772-0.1587=0.8158$$

משפט 13 אם $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, אזי

$$E(X)=\mu \quad , \quad V(X)=\sigma^2 \quad , \quad M_X(t)=E(e^{tX})=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

3.3 התפלגות מעריכית (אקספוננציאלית) והתפלגות גאמא

שתי משפחות של התפלגויות בעלות חשיבות רבה בסטטיסטיקה הן ההתפלגויות האקספוננציאלית וגאמא. נדון בהן יחד משתי סיבות: הראשונה היא שההתפלגות האקספוננציאלית היא מקרה פרטי של התפלגות גאמא, והשניה הוא שסכום של משתנית מקריים בלתי תלויים המפולגים אקספוננציאלית מתפלג גאמא, כמו שנראה בפרק 6.

הגדרה 10 התפלגות אקספוננציאלית נאמר כי משתנה מקרי רציף X מפולג אקספוננציאלית עם פרמטר λ, ונסמן $X \sim Exp(\lambda)$ אם ל- X פונקצית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר הפרמטר $\lambda > 0$.

משפט 14 אם $X \sim Exp(\lambda)$, אזי

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad , \quad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{for} \;\; t < \lambda$$

ההתפלגות האקספוננציאלית הייתה ההתפלגות שבה השתמשנו כדוגמא של חלק מההגדרות שניתנו בפרק 4, ושם גם ההוכחה של משפט 14. בנוסף, משפט 14 הוא מקרה פרטי של משפט 15 שיובא להלן.

הגדרה 11 התפלגות גאמא נאמר כי משתנה מקרי רציף X מפולג גאמא עם פרמטרים α ו- λ, ונסמן $X \sim Gamma(\alpha,\lambda)$ אם ל- X פונקצית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = f_X(x;\alpha,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר הפרמטרים α ו- λ מקיימים: $\alpha > 0$, $\lambda > 0$.

הערה התפלגות גאמא עם פרמטר $\alpha = 1$ היא התפלגות אקספוננציאלית.

משפט 15 אם $X \sim Gamma(\alpha,\lambda)$, אזי

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad , \quad V(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2} \quad , \quad M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha \quad \text{for} \;\; t < \lambda$$

משתמשים בהתפלגות האקספוננציאלית כמודל לתיאור אורך חיים של פריטים שונים. כשהצגנו את ההתפלגות הפואסונית, דיברנו על אירועים מסוימים, כמו פליטת חלקיקים, הקורים לאורך זמן. ניתן להראות (פיסקה 4.2) כי הזמן הבינמופעי מפולג אקספוננציאלית בתנאי שמספר המופעים באינטרוול זמן קבוע מפולג פואסונית. כמו כן, אם נניח שמספר המופעים באינטרוול זמן קבוע מפולג פואסוני, אזי אורך הזמן בין זמן 0 וזמן המופע ה r-י מפולג גאמא. כלומר ניתן לחשוב על משתנה מקרי גאמא כמו על משתנה מקרי רציף המתאר זמן המתנה למופע מס' r. נזכור שהמשתנים המקריים הגיאומטרי והבינומי שלילי היו משתנים מקריים בדידים של זמן המתנה. במובן מסוים הם האנלוג הבדיד למשתנים המקריים הרציפים האקפוננציאלי וגאמא.

משפט 16 אם $X \sim Gamma(r,\lambda)$, כאשר r מספר שלם חיובי, אזי

$$F_X(x) = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^j e^{-\lambda x}}{j!}$$

הוכחה: נסמן ב $N(x)$ את מספר המופעים בקטע $(0,x)$ ונשים לב לשקילות המאורעות הבאים:

$\{N(x) \geq r\}$ = {זמן המופע ה r׳ קטן/שווה x}

אבל המ"מ $N(x) \sim P(\lambda \cdot x)$ ומכאן ההוכחה.

משפט 17 **תכונת חוסר הזיכרון** אם X מפולג אקספוננצילית עם פרמטר λ, אזי

$P(X > t+s \mid X > s) = P(X > t)$ לכל $s,t > 0$.

נניח ש X מייצג אורך חיים של רכיב. אזי, במילים, משפט 17 אומר שההסתברות המותנה שרכיב יחיה מעבר ל t+s יחידות זמן נתון שהוא חי כבר s יחידות זמן (יחיה מעבר ל t יחידות זמן נוספות), שווה להסתברות שרכיב שזה עתה החל לפעול יחיה מעבר ל t יחידות זמן. דרך אחרת לומר זאת היא שלרכיב "זקן" שכבר פועל יש אותה התפלגות אורך חיים כמו לרכיב "חדש", או שהרכיב אינו מתעייף.

3.4 התפלגות ביתא

משפחה של צפיפויות של משתנים מקריים רציפים המקבלים ערכים בקטע (0,1) היא המשפחה של התפלגויות ביתא.

הגדרה 12 התפלגות ביתא נאמר כי משתנה מקרי רציף X מפולג ביתא עם פרמטרים α ו- β, ונסמן $X \sim Beta(\alpha,\beta)$ אם ל- X פונקצית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = f_X(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר הפרמטרים α ו- β מקיימים: $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

הפונקציה $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$, נקראת פונקצית ביתא.

הערה התפלגות ביתא עם פרמטרים $\beta = 1$, $\alpha = 1$ היא התפלגות אחידה בקטע (0,1).

משפט 18 אם $X \sim Beta(\alpha,\beta)$, אזי

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad , \quad V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

3.5 התפלגויות רציפות אחרות

התפלגות קושי, התפלגות לוג-נורמלית, התפלגות אקספוננציאלית כפולה, התפלגות וייבל, התפלגות פרטו ועוד. נדון בהתפלגויות האלה בדוגמאות ותרגילים.

4 הערות

4.1 קירובים

הקירוב הפואסוני להתפלגות הבינומית הגדרנו את פונקצית ההסתברות של משתנה מקרי בינומי עם פרמטרים n ו- p , על ידי

$$\binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

כאשר הפרמטר n שואף לאינסוף והפרמטר p שואף ל- 0 כך ש np נשאר קבוע, נניח שווה ל- λ, אזי עבור x קבוע:

$$\binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \to \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

היעילות שבקירוב זה נובעת מהעובדה שלמשתנה מקרי בינומי שני פרמטרים בעוד שלמשתנה מקרי פואסוני רק פרמטר אחד.

הקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית ולהתפלגות הפואסונית שני הקירובים הנ"ל נובעים ממשפט הגבול המרכזי. בתנאים מסוימים מתקיים:

1. אם $X \sim B(n,p)$ אזי עבור n מספיק גדול, $X \sim N(np,npq)$. נשים לב שההתפלגות הבינומית היא התפלגות בדידה ושההתפלגות המקרבת הנורמלית היא התפלגות רציפה ולכן נידרש לעשות תיקון רציפות.
2. אם $X \sim P(\lambda)$ אזי , $X \sim N(\lambda,\lambda)$.

4.2 הקשר בין התפלגות פואסונית והתפלגות אקספוננציאלית

כשהצגנו את התפלגות פואסון בסעיף 2.4 , דנו בניסוי שבו נספרים מופעים של תופעה מסוימת לאורך זמן. אמרנו שתחת תנאים מסוימים מספר המופעים באינטרוול זמן קבוע מפולג פואסונית עם פרמטר, התוחלת, הפרופורציונלית לאורך האינטרוול. נניח כעת כי אחד המופעים האלה קרה עכשיו. מה היא התפלגות אורך הזמן, נניח X , שנצטרך לחכות עד המופע הבא?

$$P(X > t) = P(\text{לא היה מופע באינטרוול זמן באורך } t) = e^{-\lambda t}$$

כאשר λ הוא קצב ממוצע של מופעים ליחידת זמן. לכן,

$$F_X(t) = P(X \le t) = 1 - P(X > t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad , t > 0$$

כלומר X מפולג אקספוננציאלית עם פרמטר λ.