פרק 7 : משתנה מקרי דו-ממדי, התפלגות סכום משתנים מקריים ומשפט הגבול המרכזי

1. משתנה מקרי דו ממדי - הקדמה

ראינו כי משתנה מקרי חד ממדי נותן ביטוי כמותי לתוצאות השונות של ניסוי מקרי. לעיתים אנו מעוניינים בביטוי כמותי דו ממדי לתוצאות הניסוי. לדוגמא: בהיבחר אדם באופן מקרי מאוכלוסיה, אנו עשויים להתעניין בעת ובעונה אחת בגובה שלו ובמשקל שלו ושניהם משתנים מקריים חד ממדיים. או בהיבחר סטודנט מהכיתה באופן מקרי נתעניין בזוג הציונים שלו במתמטיקה דיסקרטית ובהסתברות. לכן ההכללה הטבעית של משתנה מקרי חד ממדי היא משתנה מקרי דו ממדי.

2. הגדרות

הגדרה 1 משתנה מקרי דו ממדי

נתון מרחב הסתברות. הזוג (X,Y) נקרא משתנה מקרי דו ממדי על מרחב המדגם Ω, אם X ו- Y הם משתנים מקריים חד ממדיים המוגדרים על Ω. כלומר לכל נקודה ω במרחב המדגם Ω מתאים המשתנה המקרי (X,Y) את הנקודה $(X(\omega),Y(\omega))$ במישור.

דוגמא 1:

מטילים מטבע סימטרית פעמיים. מרחב המדגם הוא: {(פ,פ),(ע,פ),(פ,ע),(ע,ע)} = Ω

ולכל תוצאה יש הסתברות שווה ¼. נגדיר שני משתנים מקריים

X = מספר ה- 'ע'

Y = ההפרש בין מספר ה- 'ע' למספר ה- 'פ' .

המשתנה המקרי הדו ממדי (X,Y) מוגדר על ידי:

$$(X,Y)(\omega)=(X(\omega),Y(\omega))=\begin{cases}(2,2) & \omega=(\text{ע},\text{ע})\\(1,0) & \omega=(\text{פ},\text{ע})\\(1,0) & \omega=(\text{ע},\text{פ})\\(0,-2) & \omega=(\text{פ},\text{פ})\end{cases}$$

והוא מעביר את 4 תוצאות הניסוי לשלוש נקודות במישור $(2,2)$, $(1,0)$, $(0,-2)$

ואלו מקבלות את ההסתברויות ¼ ½ ¼

הדוגמא הנ"ל היא דוגמא של משתנה מקרי דו ממדי בדיד.

הגדרה 2 משתנה מקרי דו ממדי בדיד

משתנה מקרי דו ממדי נקרא "משתנה מקרי דו ממדי בדיד" אם קיימות סדרות של ערכים (סופיות או אינסופיות) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ו- $\ldots, y_1, y_2, y_3$ כך ש:

$$\sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

הפונקציה $P_{X,Y}(\cdot,\cdot)$ המוגדרת על ידי $P_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ לכל i ולכל j נקראת פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי הדו ממדי (X,Y) .

הגדרה 2 אומרת שניתן לאפיין משתנה מקרי דו ממדי על ידי חוק ההתפלגות שלו כלומר, על ידי רשימת הערכים שהמשתנה המקרי מקבל עם הסתברויותיהם בהתאמה (כמו גם משתנה מקרי חד ממדי).

הערות

1. צורה נוחה להצגת ההתפלגות של המשתנה המקרי הדו ממדי (X,Y) היא בעזרת טבלה דו-ממדית כדלהלן:

x \ y	y_1	y_2	....	y_j	....	
x_1						
x_2						
.						
.						
x_i				$P(X=x_i,Y=y_j)$		
.						

בשוליים למעלה רושמים את הערכים האפשריים של המשתנים מקריים X ו- Y , ואילו בתוך הטבלה, בתא המתאים לזוג הערכים (x_i, y_j) רושמים את ההסתברות המתאימה $P_{X,Y}(x_i, y_j)$.

2. יש לזכור כי המאורע $\{X = x_i, Y = y_j\}$ הוא בעצם חיתוך של שני מאורעות, כלומר

$$\{X = x_i, Y = y_j\} = \{\omega; X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\} = \{\omega; X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega; Y(\omega) = y_j\}$$

3. תכונות פונקצית ההסתברות

לפונקצית ההסתברות של משתנה מקרי דו ממדי שתי התכונות הבאות:

1. $0 \le P_{X,Y}(x_i, y_j) \le 1$ לכל i ולכל j

2. $\sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = 1$

תכונה 1 נובעת מעצם הגדרת $P_{X,Y}(\cdot,\cdot)$ כהסתברות.

תכונה 2 מבטאת את העובדה שהזוגות (x_i, y_j) עבור כל i ו- j הם כל זוגות הערכים שהמשתנה המקרי הדו ממדי יכול לקבל. כלומר:

$$\sum_i \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = P\left(\bigcup_{i,j} \{\omega; X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\}\right) = P(\Omega) = 1$$

אלו תכונות אופייניות של פונקצית הסתברות במובן זה, שאם נתונה פונקציה P המקיימת את התכונות הנ"ל עבור סדרת זוגות (x_i, y_j) אזי היא יכולה להיחשב פונקצית הסתברות של משתנה מקרי דו ממדי.

הערה

פונקצית ההסתברות $P_{X,Y}(\cdot,\cdot)$ מחלקת הסתברויות לנקודות במישור, ולכן אם A קבוצה כלשהי במישור, אזי

$$P((X,Y) \in A) = \sum_{(x_i,y_j)\in A} P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

דוגמא 2:

מטילים מטבע מאוזן, שעל צדדיו הספרות 0 ו- 1. אם מופיעה הספרה 0 ממשיכים את הניסוי בהטלת קוביה סימטרית, ואם מופיעה הספרה 1 מטילים את המטבע שנית. נגדיר:

X = המספר המופיע בהטלה ראשונה.

Y = המספר המופיע בהטלה שניה.

נציג את חוק ההתפלגות של המשתנה המקרי הדו ממדי (X,Y) בטבלה, ונחשב את ההסתברויות: $P(X=Y)$, $P(X+Y < 4)$, $P(X^2+Y^2 < 9)$.

דוגמא 3:

מסובבים סביבון הוגן שעליו הספרות 1, 2, 3, 4 פעמיים. נגדיר:

X = תוצאת הסיבוב הראשון.

Y = המקסימום בין התוצאות.

מצא/י את חוק ההתפלגות של המשתנה המקרי הדו ממדי (X,Y), ואת ההסתברות $P(Y=3)$.

בדוגמא זו אנו רואים שניתן למצוא את חוק ההתפלגות של Y ושל X מתוך ההתפלגות של המשתנה המקרי הדו ממדי (X,Y) – על ידי סיכום עמודות ושורות. נגדיר עכשיו:

הגדרה 3 פונקצית הסתברות שולית

יהי (X,Y) משתנה המקרי דו ממדי בדיד, בעל פונקצית הסתברות $P_{X,Y}(\cdot,\cdot)$.

1. "פונקצית ההסתברות השולית של X", מסומנת ב- $P_X(\cdot)$, ומוגדרת על ידי

$$P_X(x_i) = \sum_j P_{X,Y}(x_i, y_j) \qquad i = 1,2,\ldots$$

2. "פונקצית ההסתברות השולית של Y", מסומנת ב- $P_Y(\cdot)$, ומוגדרת על ידי

$$P_Y(y_j) = \sum_i P_{X,Y}(x_i, y_j) \qquad j = 1,2,\ldots$$

4. משתנים מקריים בלתי תלויים

ראינו שמתוך הכרת חוק ההתפלגות של המשתנה המקרי הדו ממדי (X,Y) ניתן למצוא את חוקי ההתפלגות (השוליים) של המשתנים המקריים X ו- Y. נשאלת השאלה באילו תנאים קובעות ההתפלגויות השוליות את ההתפלגות המשותפת. שאלה זו מביאה אותנו להגדרה הבאה:

הגדרה 4 משתנים מקריים בלתי תלויים

יהי (X,Y) משתנה המקרי דו ממדי בדיד, בעל פונקצית הסתברות $P_{X,Y}(\cdot,\cdot)$.

נאמר כי X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים אם:

<u>לכל</u> $(x,y) \in R^2$ $\qquad P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\cdot P_Y(y)$

כלומר, אם פונקצית ההסתברות המשותפת של (X,Y) שווה למכפלת ההסתברויות השוליות של X ושל Y.

משפט 1

יהיו X ו- Y משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים אם ורק אם

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\cdot P(Y \in B)$$

לכל שתי קבוצות A ו- B על הישר.

משפט 2

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים. ויהיו $W = h(X)$ ו- $Z = g(Y)$ משתנים מקריים, אזי גם W ו- Z הם משתנים מקריים בלתי תלויים.

5. תוחלת

כשהצגנו את עקרון התוחלת עבור משתנה מקרי חד ממדי בפרק 4 (סעיף 4), הגדרנו תחילה את התוחלת והשונות כמקרים מיוחדים של תוחלת ואחר כך הגדרנו באופן כללי תוחלת של פונקציה כלשהי של משתנה מקרי. בפרק זה נתחיל בהגדרת תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי דו ממדי, ואחר כך נציג מקרים מיוחדים.

הגדרה 5 תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי דו ממדי

יהי (X,Y) משתנה המקרי דו ממדי בדיד, בעל פונקצית הסתברות $P_{X,Y}(\cdot,\cdot)$.

ותהי $g(x,y)$ העתקה מהמישור לישר. אזי $g(X,Y)$ הוא משתנה מקרי חד ממדי והתוחלת שלו, המסומנת ב- $E[g(X,Y)]$, מוגדרת על ידי

$$E[g(X,Y)]=\sum_x\sum_y g(x,y)\cdot P_{X,Y}(x,y)$$

דוגמא 4:

נחשב בדוגמא 3 את $E(X\cdot Y)$, $E(X+Y)$.

משפט 3

יהיו X ו- Y משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות ובעלי תוחלות סופיות אזי:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

כלומר, תוחלת של סכום משתנים מקריים שווה לסכום התוחלות.

התכונה הזו של התוחלת אינה מותנה באופי הקשר בין המשתנים המקריים X ו- Y. היא נכונה בין אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים ובין אם הם משתנים מקריים תלויים.

6. שונות של סכום משתנים מקריים

ראינו כי לגבי משתנים מקריים X ו- Y בעלי תוחלות סופיות קיים:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

נמצא כעת את הקשר בין השונות של X+Y לבין השונות של X ושל Y.

נסמן: $E(Y)=\mu_Y$, $E(X)=\mu_X$. אזי $E(X+Y)=\mu_X+\mu_Y$ ולכן

$$\begin{aligned}V(X+Y)&=E\left(X+Y-(\mu_X+\mu_Y)\right)^2\\&=E\left((X-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2+2\cdot(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)\\&=E\left((X-\mu_X)^2\right)+E\left((Y-\mu_Y)^2\right)+2E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)\end{aligned}$$

כלומר

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)$$

הגדרה 6 שונות משותפת – קו-וריאנס

יהיו X ו- Y משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות ובעלי תוחלות μ_X , μ_Y בהתאמה. ה "שונות משותפת (הקו-וריאנס) של X ו- Y מסומנת ב- $Cov(X,Y)$ ומוגדרת על ידי

$$Cov(X,Y) = E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)$$

מכאן שהוכחנו את הטענה הבאה:

טענה 1

יהיו X ו- Y משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות ובעלי שונויות סופיות, אזי ל- X+Y יש שונות סופית וקיים

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\cdot Cov(X,Y)$$

טענה 2

$$Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

7. אי תלות ותוחלת

הגדרנו כבר אי תלות ותוחלת. בפיסקה זו נקשר בין שני המושגים.

משפט 4

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים. ותהיינה $g_1(X)$, $g_2(Y)$ פונקציות, כל אחת של משתנה אחד. אזי,

$$E[g_1(X)\cdot g_2(Y)] = E[g_1(X)]\cdot E[g_2(Y)]$$

בפרט, אם $g_1(X) = X$, $g_2(Y) = Y$ מתקיים $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$

מסקנות:

1. אם X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים אזי $Cov(X,Y) = 0$.
2. אם X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים אזי $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

8. התפלגות סכום של משתנים מקריים

יהי (X,Y) משתנה מקרי דו ממדי, ויהי $Z = X + Y$ אזי:

1. אם (X,Y) משתנה המקרי דו ממדי בדיד

$$P_Z(z) = P(X+Y=z) = \sum_x P(X=x, Y=z-x) = \sum_y P(X=z-y, Y=y)$$

2. אם (X,Y) משתנה המקרי דו ממדי רציף

$$f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)dx = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)dy$$

8.1 התפלגות סכום של משתנים מקריים בלתי תלויים – קונוולוציה

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים, ויהי $Z = X + Y$ אזי:

1. במקרה הבדיד

$$P_Z(z) = P(X+Y=z) = \sum_x P(X=x)P(Y=z-x) = \sum_y P(X=z-y)P(Y=y)$$

2. במקרה הרציף

$$f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

דוגמא 5:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים, ונתון $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$.

נראה שהמשתנה המקרי $Z = X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

8.2 טכניקת פונקציה יוצרת מומנטים

קיימת שיטה נוספת, שימושית במיוחד, למציאת ההתפלגות של סכום משתנים מקריים בלתי תלויים הנקראת טכניקת פונקציה יוצרת מומנטים.

משפט 5

אם $X_1, X_2, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים, ואם קיימת הפונקציה היוצרת מומנטים של כל אחד מהם לכל $-h < t < h$ ועבור $h > 0$, ויהי $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ אזי,

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \qquad \text{for } -h < t < h.$$

דוגמא 6:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים, ונתון $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$.

נראה שהמשתנה המקרי $Z = X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

דוגמא 7:

נניח $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים מפולגים ברנולי. כלומר,

$P(X_i = 0) = 1-p$, $P(X_i = 1) = p$. נראה ש $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$.

דוגמא 8:

נניח $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות, מפולגים נורמלית,

כלומר $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, אזי $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

8.3 משפט הגבול המרכזי

יהיו $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות בעלי תוחלת μ

ושונות σ^2 , אזי לכל z ממשי

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z\right] = \Phi(z)$$

הרעיון שהתפלגות של $Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, עבור n מספיק גדול, היא בקירוב $N(0,1)$ אומר

בעצם שעבור n מספיק גדול:

1. $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
2. $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

דוגמא 9:

מטילים קוביה 420 פעמים. חשבו את ההסתברות שסכום ההטלות קטן מ- 1500.

דוגמא 10:

משקל סטודנט הוא משתנה מקרי בעל תוחלת 75 קג' ושונות 225. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של 36 סטודנטים שנבחרו באקראי יהיה בין 70 ל- 80 קג'.