חזרה על נושאים מתמטים

קבוצות

יסודות והגדרות:

- $\emptyset$ --- הקבוצה הריקה.
- Ω --- מרחב המדגם (הקבוצה האוניברסלית).
- $A \subset B$ --- $\omega \in A \Longrightarrow \omega \in B$
- $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ or } \omega \in B\}$
- $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ and } \omega \in B\}$
- $A \setminus B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ and } \omega \notin B\}$
- A ו B זרים --- $A \cap B = \emptyset$
- $A^c = \Omega \setminus A$
- B_1, B_2 הם חלוקה של A אם $\cup B_i = A$ וגם $B_i \cap B_j = \emptyset$.

תכונות:

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap \Omega = A$
- $A \cap A = A \cup A = A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\emptyset^c = \Omega$
- $A \cap A^c = \emptyset$
- $A^{c^c} = A$
- כללי דמורגן: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

קומבינטוריקה (ספירה)

- מספר פרמוטציות של n איברים: n!
- מספר פרמוטציות של n אבירים סביב מעגל: (n-1)!
- $P(n,k) = (n)_k = n (n-1) (n-2 \ldots n-k+1) = n! / (n-k)!$ עבור $1 \le k \le n$.
- קומבינציות: $C(n,k) = P(n,k)/k! = (n \text{ over } k) = n! / k! (n-k)!$
 זהו המקדם הבינומי.
- מספר תת הקבוצות בגודל k מקבוצה בגודל n: C(n,k).
- מספר תת הקבוצות מקבוצה בגודל n: 2^n.
- ולכן: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- הבינום של ניוטון: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- המקדם המולטינומי: $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = n!/n_1! \ldots n_k!$, $n = n_1 + \ldots + n_k$,

סופר את מספר האפשרויות לפיצול של קבוצה בגודל n ל k קבוצות זרות בגודל $n_1 \ldots n_k$.

- מספר הצרופים בגודל k, ללא הגבלה על מספר החזרות, מקבוצה בגודל n הוא: $\binom{n+k-1}{k}$. (זה לפי בחירה של k 'איברים שאינם חוצצים' מתוך קבוצה המכילה איברים וחוצצים: k איברים ו n-1 חוצצים. n-1 החוצצים מחלקים את הקבוצה ל n חלקים.

טורים ופיתוחים שונים

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ כאשר $|q|<1$.
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sum_{k=1} k f(k) = \sum_{k=1} \sum_{j=k} f(j)$