פתרון לקובץ תרגילים 1 (שאלות 1-24)

1)

א) $A^c \cap B^c \cap C^c \neq A^c \cap B^c \cap C = (A \cup B)^c \cap C$

ב) $(B \cap C) \cup (\underbrace{B \cap A^c \cap B^c}_{\emptyset}) = (B \cap C) \cup (B \cap (A \cup B)^c) = B \cap (C \cup (A \cup B)^c)$

$C^c \cup B^c \neq B \cap C =$

ג) לסתור נניח $B = A \neq \Omega$, $C = \Omega$ אז $\underbrace{A \cap B}_{A \cap A} = \underbrace{A \cap C}_{A \cap \Omega}$

אבל $B \neq C$.

2)

א) $(n)_k$ כאשר $k \le n$, 0 כאשר $n < k$.

ב) n^k

ג) $\binom{n}{k}$ כאשר $k \le n$, 0 כאשר $n < k$.

ד) $\binom{k+n-1}{k}$

3) $\underset{\text{אלגברה}}{10} \cdot \underset{\text{חדוה}}{6} = 60$

4) $\underset{A}{4} \cdot \underset{B}{3} \cdot \underset{C}{4} = 48$

5) $\frac{30!}{20!\,4!\cdot 6!} = \frac{30!}{\cancel{26!}\,4!} \cdot \frac{\cancel{26!}}{20!\,6!} \cdot 1 = \binom{30}{4}\binom{26}{6}\underbrace{\binom{20}{20}}_{1} = \frac{30!}{20!\,6!\,4!} = \binom{30}{20\cdot 6\cdot 4}$

6) $\frac{30!}{6^{10}} = \frac{30!}{\underbrace{3!\cdot 3!\cdot \ldots \cdot 3!}_{\text{10 פעמים}}}$

7) פתרון בעזרת עקרון ההכלה-הפרדה.

ידוע:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{n+1} S_n$$

כאשר

$|A|$ - מספר איברים בקבוצה

S_k - סכום הגדלים של כל החיתוכים של k קבוצות.

ולכן: (לפי $|A|+|A^c|=|\Omega|$ ולפי דה-מורגן)

$$|A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c| = |\Omega| - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^n S_n$$

נסתכל על הסדרות $1,2,\ldots,n$ ונרצה לסדר אותן אך ספרה אינה במקומה, derangement. D_n יהיה מספר ה-derangements בקבוצה בגודל n. נגדיר:

Ω - קבוצת כל הפרמוטציות של $1,\ldots,n$

A_1 - כל הפרמוטציות כאשר הספרה 1 במקום

$\vdots$

A_n - כל הפרמוטציות כאשר הספרה n במקום

$$|A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c| = |\Omega| - S_1 + \ldots + (-1)^n S_n$$ אז רואים שמחפשים את

$|\Omega| = n!$

S_K —— בחירת $\binom{n}{k}$

$1 \leq K \leq n$ איברים (מסודרים)

כל איבר הוא חיתוך מיוחד

$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_K}|$

עבור כל קבוצה כזו K איברים

מסודרים במקומם ולכן נותר

קבוצה כזו קיים $(n-K)!$

ולכן $$S_K = \binom{n}{k}(n-K)! = \frac{n!}{K!}$$

ולכן

$$D_n = n! - \underbrace{\frac{n!}{1!}}_{S_1} + \underbrace{\frac{n!}{2!}}_{S_2} - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

ולכן

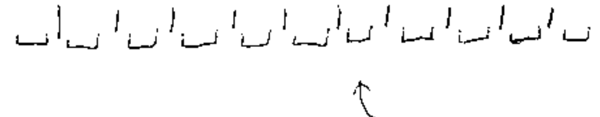
$$D_5 = 5!\left[1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right]$$

$$= \frac{120}{2} - \frac{120}{6} + \frac{120}{24} - \frac{120}{120} = 60 - 20 + 5 - 1 = 44$$

8) א) $2^8=256$

ב) $\binom{15}{10}=\binom{15}{5}=\binom{10+5}{5}$

ג)



צריך לבחור 5 מהמקומות שיהיו בהם אפסים.

$\binom{11}{5}$.

9) $4\cdot6$ - עבור חיתוך של כל קו מקביל (4) עם שש הקווים האחרים.

$\binom{6}{2}$ - עבור חיתוך של כל 2 קווים לא מקבילים.

סה"כ: $4\cdot6+\binom{6}{2}=39$.

10) נפריד פה לשני מקרים.

א) שני מדינות מופיעות פעמיים ומדינה אחת 4 פעמים.

$\binom{3}{2}\frac{8!}{2!2!4!}$

$+$

ב) שני מדינות מופיעות 3 פעמים ומדינה אחת פעמיים.

$\binom{3}{1}\cdot\frac{8!}{3!3!2!}$

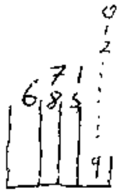
11) $\frac{10!}{1!\,2!\,7!}$

מגולת — כלים — שאר ילדים

12) $2^{10} - 1$

מספר תת קבוצות — להחסיר סגור $\emptyset$

13)



$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 = 40$

14) $\frac{9!}{2!\,3!\,4!}$

15) מגולל

16) זה כמו לבחור r מתוך n עם החזרה כאשר
הסדר לא משנה. זה כמו לפזר r כדורים לתוך n
קופסאות כך שיותר מכדור אחד בקופסא והכדורים זהים.

$$\binom{r+n-1}{r}$$

17) נראה בכמה צורות ניתן לפזר $r \geq n$ כדורים זהים
ב n תאים (ללא הגבלה) כך שאין תא ריק.
זה כמו מספר הפתרונות של
$r_1 + \dots + r_n = r - n$

וזה $\binom{r-1}{n-1} = \binom{r-n+n-1}{n-1}$

נניח שכעת $r = nk$

$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k} =$ פיזור של k כדורים ל-n תאים

—

18) נראה ש $\binom{2n}{k}<\binom{2n}{n}$ עבור $k<n$ ולכן גם $\binom{2n}{n}>\binom{2n}{2n-k}=\binom{2n}{k}$

נסתכל על המנה $\dfrac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{k}}$ ונראה שהיא $1<$

$$\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{k}}=\frac{\frac{2n!}{(2n-n)!\,n!}}{\frac{2n!}{(2n-k)!\,k!}}=\frac{(2n-k)!\,k!}{(2n-n)!\,n!}=\frac{\overbrace{(2n-k)(2n-k-1)\cdots(2n-n+1)}^{n-k \text{ איברים}}}{\underbrace{n(n-1)\cdots(k+1)}_{n-k \text{ איברים}}}$$

אבל כל איבר במונה > מכל איבר במכנה ולכן המנה > 1.

19) $\binom{2n}{n}\le 2^{2n}$: הוכחה: $\binom{2n}{n}\le\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=2^{2n}$

אחד מאיברי הסכום

$\frac{1}{2n}2^{2n}\le$ הוכחה:

עבור $n=1$ מתקיים שוויון

עבור $n\ge 2$ נראה ש $2^{2n}\le 2n\binom{2n}{n}$

$$2^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=1+\sum_{k=1}^{2n-1}\binom{2n}{k}+1=2+\sum_{k=1}^{2n-1}\binom{2n}{k}\le 2+(2n-1)\binom{2n}{n}$$

לפי תרגיל קודם.

$$=2n\binom{2n}{n}+\underbrace{2-\binom{2n}{n}}_{\text{שלילי עבור } n\ge 2}\le 2n\binom{2n}{n}$$

20) לפי הכלה-הפרדה $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

A - מתחילים ב- 000 $\longrightarrow |A| = 2^7$

B - נגמרים ב- 1111 $\longrightarrow |B| = 2^6$

$A\cap B$ - מתחילים ב- 000 וגם נגמרים ב- 1111 $\longrightarrow |A\cap B| = 2^3$

$$|A\cup B| = 2^7 + 2^6 - 2^3 = 2^3(2^4 + 2^3 - 1) = 184$$

21) $\binom{105}{2}$

22) $\dfrac{52!}{5!5!5!5!32!}$

23)

$$0 = 0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

24)

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\, p (1-p)^{i-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{i=0}^{\infty} i (1-p)^i = \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} (1-p)^j$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^{i+j} = \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i \frac{1}{p} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p}$$