קובץ תרגילים 5

תרגיל בית

1) משתנה מקרי אחיד

א) $X \sim U(1,N)$

הפרמטר N חיובי ושלם.

ב) $X = 1,2,\dots,N$

ג)
$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & x = 1,2,\dots,N \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\sum_{x=1}^{N} P_X(x) = \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{x=1}^{N} 1 = \frac{1}{N}(N-1+1) = 1$$

ד)
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{N} & 1 \le x < 2 \\ \vdots & \\ \frac{K}{N} & K \le x < K+1 \\ \vdots & \\ 1 & N \le x \end{cases}$$

ה) משתנה המקבל כל ערך באותה הסתברות.

משתנה מקרי ברנולי

א) $X \sim B(1,p)$

הפרמטר $0 \leq p \leq 1$

ב) $x = 0,1$

ג)
$$P_X(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x=0,1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\sum_{x=0}^{1} p^x (1-p)^{1-x} = p + (1-p) = 1$$

ד)
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

ה) משתנה ברנולי סופר את מספר ההצלחות בניסוי ברנולי אחד.

משתנה מקרי בינומי

א) $X \sim Bin(n,p)$

הפרמטרים : n,p n שלם וחיובי $0 \leq p \leq 1$.

ב) $x = 0,1,\dots,n$

ג)
$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x=0,1,\dots,n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\sum_{x=0}^{n} P_X(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \underset{\text{בינום של ניוטון}}{=} (p + 1-p)^n = 1$$

ד)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ (1-p)^n & 0 \le x < 1 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & k \le x < k+1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \le x \end{cases}$$

ה) משתנה בינומי סופר את מספר ההצלחות ב-n ניסויי ברנולי בלתי תלויים.

<u>משתנה מקרי גיאומטרי</u>

א) $X \sim G(p)$

הפרמטר $0 < p \le 1$

ב) $x = 1, 2, \ldots$

ג)

$$P_X(x) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^{x-1} & x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} P_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1} = \frac{p}{(1-p)} \cdot \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^x}_{\text{טור גיאומטרי מתכנס}} = \frac{p}{(1-p)} \cdot \frac{(1-p)}{p} = 1$$

ד)
$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ p & 1\le x<2 \\ \vdots & \\ \sum_{x=1}^{k} p(1-p)^{x-1} & k\le x<k+1 \\ \vdots & \\ \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1}=1 & \lim_{x\to\infty} F_X(x) \end{cases}$$

ה) משתנה גיאומטרי סופר את מספר הנסיונות עד להצלחה הראשונה בסדרה של נסויי ברנולי בלתי תלויים.

<u>משתנה מקרי בינומי שלילי</u>

א) $X \sim NB(r,p)$

הפרמטרים: r,p r-שלם וחיובי $0<p\le 1$

ב) $x=r,r+1,\dots$

ג)
$$p_X(x)=\begin{cases} \binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r} & x=r,r+1,\dots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ד)
$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<r \\ p^r & r\le x<r+1 \\ \vdots & \\ \sum_{x=r}^{k}\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r} & k\le x<k+1 \\ \vdots & \\ \sum_{x=r}^{\infty}\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}=1 & \lim_{x\to\infty} F_X(x) \end{cases}$$

ה) משתנה בינומי שלילי סופר את מס' הניסיונות עד להצלחה ה-r בסדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים.

<u>משתנה מקרי היפר גאומטרי</u>

א) $X \sim HG(M,K,n)$

הפרמטרים: M,K,n

M - שלם וחיובי

$K \leq M$ - שלם ואי שלילי

$n \leq M$ - שלם וחיובי.

ב) $\max(0, n-(M-K)) \leq x \leq \min(K,n)$

ג)

$$P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} & \max(0,n-(M-K)) \leq x \leq \min(K,n) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ד) נסמן:

$$a = \max(0, n-(M-K))$$
$$b = \min(K,n)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{x=a}^{K} \dfrac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} & K \leq x < K+1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \min(K,n) \leq x \end{cases}$$

ה) משתנה היפר גאומטרי סופר את מס' הפריטים מסוג א' במדגם בגודל n שנלקח ללא החזרה מאוכלוסיה בגודל M מתוכה K פריטים מסוג א' והיתר $(M-K)$ מסוג ב'.

ש)

<u>משתנה מקרי פואסוני</u>

א) $X \sim poiss(\lambda)$

הפרמטר: $\lambda > 0$

ב) $x = 0, 1, \ldots$

ג)

$$P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0,1,\ldots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} P_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \underset{\text{טור טיילור}}{=} e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

ד)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \vdots & \vdots \\ \displaystyle\sum_{x=0}^{K} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & K \le x < K+1 \\ \vdots & \vdots \\ \displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1 & \lim_{x \to \infty} F_X(x) \end{cases}$$

ה) משתנה פואסוני סופר את מס' המופעים ליח' זמן.

א׳י׳)

4) א) - הזריקות צריכות להיות בלתי תלויות,
כלומר שהשחקן לא יתעייף.
- ההסתברות שהשחקן יקלע בכל פעם נשארת זהה.

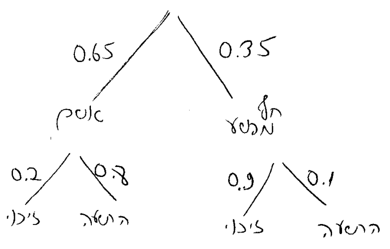
ב) - השיחות צריכות להיות בלתי תלויות,
כלומר ~~[illegible]~~ שכל שיחה תענה (לא יהיה תפוס או שיחה ממתינה),
ושהמרכזנית תענה באופן זהה לכולם.
- ההסתברות שאדם שמתקשר יבקש את ~~[illegible]~~ המספר של אונ׳ חיפה תהיה זהה מאדם לאדם.

6) X - מספר התשובות הנכונות

$$X \sim Bin\left(10, \tfrac{1}{4}\right)$$

$$P(X \geq 6) = \sum_{x=6}^{10} \binom{10}{x} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{x} \left(\tfrac{3}{4}\right)^{10-x}$$

8)



$$P\left(\text{אדם יזוכה ע"י מושבע אחד}\right) = 0.65\cdot 0.2 + 0.35 \cdot 0.9 = 0.445$$

X - מס׳ המושבעים שירשיעו את הנאשם.

$$X \sim Bin(12, 0.555)$$

$$P(X \geq 9) = \sum_{9}^{12} \binom{12}{x} (0.555)^{x} (0.445)^{12-x}$$

ט)

9) X - מספר הבנים בועד

$$X \sim HG(\underset{M}{9}, \underset{K}{5}, \underset{n}{3})$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{5}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{9}{3}} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב) נגדיר: Y - מס' הנסיונות בסדרת ניסויי ברנולי בלתי תלויים עם פרמטר הצלחה p עד ההצלחה ה-K.

$$Y \sim NB(K, p)$$

$$P_Y(y) = \begin{cases} \binom{y-1}{K-1} p^K (1-p)^{y-K} & y = K, K+1, \ldots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$X = Y - K$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{x+K-1}{K-1} p^K (1-p)^x & x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

X דומה למה Y שהוגדר והקשר: $X = Y - K$.