1)

$$P(Y=y)=\begin{cases}\frac{1}{6} & y=1,3,5\\ \frac{1}{3} & y=0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$EY=\sum_y yP(Y=y)=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{1}{6}(9)=\frac{3}{2}$$

$$V(Y)=\sum_y (y-EY)^2P(Y=y)=EY^2-E^2Y=\frac{35}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{70}{12}-\frac{27}{12}=\frac{43}{12}$$

$$EY^2=\sum_y y^2P(Y=y)=\frac{1}{6}\cdot 1^2+\frac{1}{6}3^2+\frac{1}{6}5^2=\frac{1}{6}(35)=\frac{35}{6}$$

2)

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \Leftarrow X\sim Bin(n,p)$$

אזי

$$X=Y_1+\dots+Y_n \Leftarrow$$

$Y_i\sim Bernoulli(p)$ iid (independent , identically distributed)

בלתי תלויים

שווי התפלגות.

דרך א)

$E(W_1+\dots+W_n)=EW_1+\dots+EW_n$ נשתמש בתכונה

אזי בסוגרה

נסמן Y_i ברנולי. $P(Y_i=y)=\begin{cases}p & y=1\\ 1-p & y=0\end{cases}$

$$EY_i=p\cdot 1+(1-p)0=p$$

$$EX=E(Y_1+\dots+Y_n)=EY_1+\dots+EY_n=p+\dots+p=np$$

דרך ב)

$$EX=\sum_{K=0}^{n} K\binom{n}{K}p^K(1-p)^{n-K} = \sum_{K=1}^{n} K\binom{n}{K}p^K(1-p)^{n-K}$$

$$K\binom{n}{K}=\frac{n!}{(n-K)!(K-1)!} = n\frac{(n-1)!}{(n-1+1-K)!(K-1)!} = n\frac{(n-1)!}{((n-1)-(K-1))!(K-1)!} = n\binom{n-1}{K-1}$$

$$=n\sum_{K=1}^{n}\binom{n-1}{K-1}p^K(1-p)^{n-K} = np\sum_{K=1}^{n}\binom{n-1}{K-1}p^{K-1}(1-p)^{n-K}$$

$$=np\underbrace{\sum_{K=0}^{n-1}\binom{n-1}{K}p^K(1-p)^{n-K-1}}_{1} = np$$

3) $CV=\frac{\sigma}{\mu}$ מקדם ההשתנות

סימון נפוץ לסטיית תקן

סימון נפוץ לתוחלת

במ"מ פואסוני

$\mu=\lambda$

$CV=\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Leftarrow \quad \sigma=\sqrt{\lambda} \Leftarrow \sigma^2=\lambda$

4) א)

$$EY=E(aX+b)=\sum_x (ax+b)P(X=x)=a\sum_x xP(X=x)+b\sum_x P(X=x)$$

$$=aEX+b\cdot 1= aEX+b$$

ב)

$$VY=E(Y-EY)^2=E(aX+b-aEX-b)^2=Ea^2(X-EX)^2=a^2VX$$

ג) השונות היא מדד של פיזור ולכן ל- **b** רק מזיז ולא מפזר.

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{2n+1} & x\in[a-n,a+n]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$ (5

$$EX=\sum_{x=a-n}^{x=a+n} x\,\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\sum_{x=1}^{x=2n+1} x+(a-n)-1=\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}+(2n+1)(a-n-1)\right)$$ (k

$$=(n+1)+(a-n-1)=a$$

$$EX^2=\sum_{x=a-n}^{a+n} x^2\,\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\sum_{x=1}^{2n+1}(x+(a-n)-1)^2=\frac{1}{2n+1}\sum_{x=1}^{2n+1}\left(x^2+2x(a-n-1)+(a-n-1)^2\right)$$ (λ

$$=\frac{\sum_{x=1}^{2n+1}x^2}{2n+1}+\frac{2(a-n-1)}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}+\frac{2n+1}{2n+1}(a-n-1)^2$$

$$=\frac{\sum_{x=1}^{2n+1}x^2}{2n+1}+(a-n-1)(2n+2)+(a-n-1)^2$$

$$\sum_{x=1}^{K}x^2=\frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$$

$$=\frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{(2n+1)6}+(a-n-1)(2n+2)+(a-n-1)^2$$

$$=\frac{(2n+2)(4n+3)}{6}+(2n+2)(a-n-1)+(a-n-1)^2$$

$$=\frac{8n^2+6n+8n+6}{6}+2na-2n^2-2n+2a-2n-2+a^2-2(n+1)a+(n+1)^2$$

$$=\;.\;.\;.\;.\;.$$

6) לזכור המתקיים:

$$V(X)=E(X-EX)^2=EX^2-E^2X$$

מומנט שני

ולכן

$$EX^2=V(X)+E^2X$$
$$=2+20^2$$
$$=402$$

7) א) כאשר הוצאה עם החזרה $P(\text{אדום})=0.7=p$

מספר ההוצאות $n=2$.

$$X\sim Bin(n,p)$$

$$EX=n\cdot p=2\cdot 0.7=1.4$$

$$VX=np(1-p)=2\cdot 0.7\cdot 0.3=0.42$$

ב) כאשר הוצאה ללא החזרה

$$X\sim HG(10,7,2)$$

גודל אוכלוסיה; מספר מיוחדים; גודל מדגם

$$EX=2\cdot\frac{7}{10}=1.4$$

$$VX=2\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{10-2}{10-1}=\frac{2\cdot 7\cdot 3\cdot 8}{100\cdot 9}=0.37$$

8) $X \sim Bernulli(0.05)$ מקבל 1 כאשר המועמד מתקבל
מקבל 0 כאשר המועמד נכשל.

הרווח כאשר מתקבל הוא $20{,}000-2000 = 18{,}000$.
הרווח כאשר נכשל הוא -2000.

נגדיר $Y=20{,}000X-2000$, אז Y הוא הרווח.

$$EY = 20{,}000 \cdot EX - 2000 = 1000 - 2000 = -1000$$

ב)

9)

$$EX = \sum_{x=0}^{\infty} x\,P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\,P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=x}^{\infty} P(X=y) = \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} P(X > x) = \sum_{x=0}^{\infty} \left(1 - F_X(x)\right)$$

10)

א)

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x \in (1,2,3,4,5,6) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב)

$$P(Y=y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x=1 \\ \frac{1}{2} & x=2 \end{cases}$$

3) $Y = f(X)$: $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{t אי זוגי} \\ 2 & \text{t זוגי} \end{cases}$

ג)

$$EY = \sum_{x=1}^{6} f(x)\,\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+2+1+2+1+2\right) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$EY = \sum_{y=1,2} y\,\frac{1}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq y < 2 \\ 1 & 2 \leq y \end{cases}$$

$$EY = \sum_{t=0}^{\infty} \left(1 - F_Y^{(t)}\right) = \left(1 - \underbrace{F_Y^{(0)}}_{0}\right) + \left(1 - \underbrace{F_Y^{(1)}}_{\frac{1}{2}}\right) + \left(1 - \underbrace{F_Y^{(2)}}_{1}\right) + \left(1 - \underbrace{F_Y^{(3)}}_{1}\right) + \left(1 - \underbrace{F_Y^{(4)}}_{1}\right) + \dots$$ (7

$$= (1-0) + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + 0 + 0 + \dots$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$P(X=x) = p(1-p)^{x-1} \qquad X \sim Geom(p)$$ (11

$$x = 1, 2, 3, \dots$$

$$M_X(t) = E e^{tX} = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} p (1-p)^{x-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{x=1}^{\infty} (e^t)^x (1-p)^x$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{x=1}^{\infty} \left(e^t(1-p)\right)^x = \frac{p}{(1-p)} \frac{e^t(1-p)}{1 - e^t(1-p)} = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

[illegible]

$$|e^t(1-p)| < 1$$

$$-1 < e^t(1-p) < 1$$

$\uparrow$ [illegible]

$$e^t < \frac{1}{1-p}$$

$$t < \ln \frac{1}{1-p}$$

$X \sim Poisson(\lambda)$ (12

$P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$

$x=0,1,2,...$

$$M_X(t) = Ee^{tX} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{w^x}{x!} = e^w$$

6/3'

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{-\lambda(1-e^t)}$$

$$EX = \frac{dM_X(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = -\lambda\left(\frac{d}{dt}(1-e^t)\right)e^{-\lambda(1-e^t)}\bigg|_{t=0} = \lambda e^t e^{-\lambda(1-e^t)}\bigg|_{t=0} = \lambda$$

$$EX^2 = \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0} = \lambda\left(\left(\frac{d}{dt}e^t\right)e^{-\lambda(1-e^t)} + e^t\frac{d}{dt}e^{-\lambda(1-e^t)}\right)\bigg|_{t=0}$$

$$= \lambda\left(e^t e^{-\lambda(1-e^t)} + e^t\lambda e^t e^{-\lambda(1-e^t)}\right)\bigg|_{t=0} = \lambda(1+\lambda)$$

$$V(X) = EX^2 - EX = \lambda(1+\lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

$M_X(t) = Ee^{tX}$ (13

$M_X(0) = Ee^{0X} = 1$

.3'NJ

14) א) כאשר $V(X)=0$ $\quad E^2X=EX^2$

ב) $P(X=a)=1$

$$M_X(t)=Ee^{Xt}$$

$$=\sum e^{xt}P(X=x)=e^{at}$$

על כל הערכים
אבל יש רק ערך אחד: a.

ג)

$$EX=\frac{d}{dt}e^{at}\Big|_{t=0}=a$$

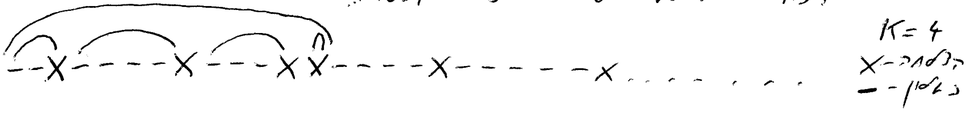
$$EX^2=\frac{d^2}{dt^2}e^{at}\Big|_{t=0}=a^2$$

$$V(X)=EX^2-E^2X=a^2-a^2=0$$

15) א) $X\sim NB(k,p)$ אז X סופר את מספר הניסויים עד להצלחה ה-k.

בהינתן סדרת ניסויי ברנולי, נקבע את ערכו של X ע"י בדיקה של הסדרה מההתחלה וספירת מספר הניסויים עד ההצלחה ה-k.

באופן זהה ניתן לומר שניתן לבדוק מהו ערכם של k מ"מ גיאומטריים. כך שהספירה עבור כל מ"מ גיאומטרי מתחילה מחדש לאחר כל הצלחה.



ג) $X_i \overset{iid}{\sim} Geom(p)$ $Y \sim NB(k,p)$

$i=1,\dots,k$

אז

לפי סעיף קודם

$Y = X_1 + \dots + X_k$

$EY = E(X_1 + \dots + X_k) = kEX_i = \frac{k}{p}$

[illegible] (24 [illegible])

16) $X \sim NB(2, 0.6)$

$EX = \frac{2}{0.6} = 3.3$

$VX = \frac{2 \cdot 0.4}{0.6^2} = 2.2$

17) $X \sim HG(\underset{\text{אוכלוסיה}}{30}, \underset{\text{מיוחדים}}{10}, \underset{\text{מדגם}}{7})$

$EX = \frac{7 \cdot 10}{30} = 2.3$ $VX = 7 \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{30-7}{30-1} = 1.24$

18) א) בינומי - דגימה עם החזרה כאשר ההסתברות היא p.

היפר-גיאומטרי - דגימה ללא החזרה כאשר ההסתברות היא בערך $\frac{N}{M}$, ($\frac{N}{M}$ עבור הראשון ולאחר מכן לא במדויק $\frac{N}{M}$).

כאשר האוכלוסיה גדולה ביחס למדגם, דגימה ללא החזרה ודגימה עם החזרה הן מאוד דומות.

ג) $n \cdot \frac{N}{M}$

ד) $n \cdot p = n \cdot \frac{N}{M}$ כי $\frac{N}{M} = p$

באוכלוסיה גדולה

19) X משתנה מקרי

$$I_A(X) = \begin{cases} 1 & X \in A \\ 0 & X \notin A \end{cases}$$

$$P(I_A(X)=1) = P(X \in A)$$
$$P(I_A(X)=0) = P(X \notin A)$$

$$E\, I_A(X) = 0 \cdot P(X \notin A) + 1 P(X \in A) = P(X \in A)$$

(k (20

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \ldots = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1 = \infty - 1 = \infty$$