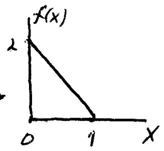
$1 =$ שטח $\rightarrow$



ג

$X \sim U(0,1)$ ⓒ 1

$Y \sim exp(1)$ $\quad Y = X - \theta$

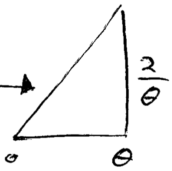
3 $\quad X \sim U(a,b)$ ⓓ

$$\int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^\infty e^{-u} du = 1$$ ⓓ

$u = \frac{x^2}{2}$

$\frac{du}{dx} = x$

$1 =$ שטח $\rightarrow$

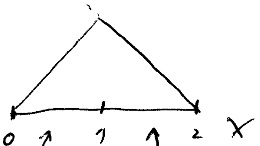


ד

$$0.2\int_0^\infty e^{-2x}dx + 0.9\int_0^\infty e^{-x}dx = \frac{0.2}{-2}\left[e^{-2x}\right|_0^\infty + 0.9 \cdot 1 = -0.1(0-1) + 0.9 = 1.0$$ 5

א

$1 =$ שטח $\rightarrow$



$f(x) = 1-(1-x) = x$ $\quad f(x) = 1 - -(1-x) = 2-x$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|x-\mu|}{6}} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-\mu)}{6}} & \mu < x \\ \frac{1}{2\pi} e^{\frac{(x-\mu)}{6}} & x < \mu \end{cases}$$ ו

$-\infty < x < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\mu} e^{\frac{x-\mu}{6}} dx + \int_{\mu}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)}{6}} dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\quad \pi \right) \neq 1$$

(1)

$f(x)=\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$

$$\int_0^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{\infty} xe^{-\frac{x}{2}}dx}_{\text{גאמה}}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=1$$

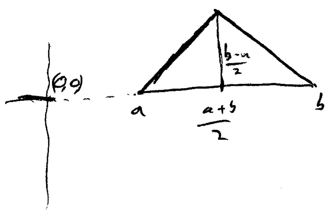
תוחלת של $exp(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$

(2) (א)

$$c\int_1^3 \frac{1}{x}dx=c(\ln 3-\ln 1)=1\ ,\quad c=\frac{1}{\ln 3-\ln 1}$$

(ב)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=c\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} x-a\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} b-x\right)$$



$$c=\frac{1}{\text{שטח המשולש}}=\left(\frac{\overset{\text{גובה}}{\frac{b-a}{2}}\cdot\overset{\text{בסיס}}{b-a}}{2}\right)^{-1}$$

$$=\frac{4}{(b-a)^2}$$

$$P\left(X>\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

(ד)

$$\int_0^{\infty} x^3e^{-3x}dx=x^3\frac{e^{-3x}}{-3}\Big|_0^{\infty}-\frac{3}{-3}\int_0^{\infty} x^2e^{-3x}dx$$

$u=x^3 \quad v'=e^{-3x}$

$u'=3x^2 \quad v=\frac{e^{-3x}}{-3}$

$$=\int_0^{\infty} x^2e^{-3x}dx=\frac{1}{3}\overbrace{\int_0^{\infty} x^2\,3e^{-3x}dx}^{\text{מומנט שני של } exp(3)}$$

$X\sim exp(\lambda)$

$EX=\frac{1}{\lambda}\quad V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$EX^2=\frac{1}{\lambda^2}+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}$

$$=\frac{1}{3}\ \frac{2}{3^2}=\frac{2}{27}\qquad \boxed{c=\frac{27}{2}}$$

$$1=\int_0^c \frac{x^2}{9}dx \Rightarrow 9=\frac{x^3}{3}\Big|_0^c \Rightarrow 9=\frac{c^3}{3}$$ ③

$$\Rightarrow 27=c^3 \qquad c=3$$

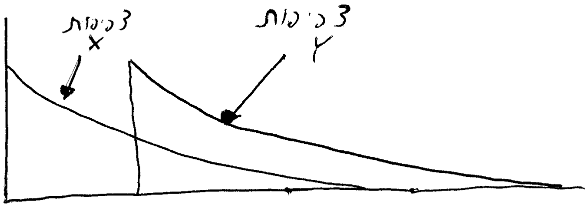
$$P(X<2)=\frac{1}{9}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{9}\frac{2^2}{3}=\frac{4}{27} \qquad P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}=\dots$$ (ד)

זהו משתנה מקרי אקספוננציאלי (θ) "מוזז".

זאת אומרת ש- $X\sim exp(\theta)$ אזי הגרף של Y:

$Y=X+\alpha$

(ב)



ולכן c הוא כמו ה-c של X: $c=\theta$.

③ (א) צורה: הכי שכיח בפסגה (2ב) כאשר

(ב) $a=0$, $b=6$ ולכן $c=\frac{4}{6^2}=\frac{1}{9}$.

$P(1.5<X<4.5)=$  $=1-c\,\blacktriangle_{1.5}-c\,\triangle_{1.5}$ (ג)

$$=1-c\cdot1.5^2=1-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(4)

(א)

$$P(X>2\cdot 28.5)=e^{-\frac{1}{28.5}(2\cdot 28.5)}=e^{-2}$$

לזכור $X\sim exp(\lambda)$

$F_X(a)=1-e^{-\lambda x}$

$EX=\frac{1}{\lambda}$

(ב) אי שוויון מרקוב

$$P(X>a)<\frac{EX}{a}$$

עבור X מ״מ חי׳.

$$P(X>105)<\frac{28.5}{105}=0.2714$$

<u>בפועל:</u>

$$P(X>105)=e^{-\frac{1}{28.5}105}=0.025$$

(ג) כיוון X הוא חסר זכרון.

$$P(X>100\mid X>99)=P(X>99+1\mid X>99)=P(X>1)=e^{-\frac{1}{28.5}1}$$

$$M_X(t)=\int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx \qquad X\sim exp(\lambda)$$ (5)

$$=\lambda\int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x}dx=\frac{\lambda}{t-\lambda}\left(e^{(t-\lambda)x}\right|_0^{\infty}=\frac{\lambda}{\lambda-t}$$

עבור

$t-\lambda<0$

$t<\lambda$

$$EX=\frac{d}{dt}M_X(t)\Big|_{t=0}=-\lambda(-1)(\lambda-t)^{-2}\Big|_{t=0}=\frac{\lambda}{(\lambda-0)^2}=\frac{1}{\lambda}$$

(6) נבדוק ש- $F(x)=1-(1+x)e^{-x}$, $x>0$ היא כן התפלגות.

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$$

ברור כי $x>0$

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=1$$

(a)

$$\frac{d}{dx}F(x)=e^{-x}-\frac{d}{dx}xe^{-x}=e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=xe^{-x} \qquad x>0$$

$$P(X<1)=F(1)=1-(1+1)e^{-1}=1-\frac{2}{e}$$

(c)

$$P(X>3)=1-F(3)=(1+3)e^{-3}=\frac{4}{e^3}$$

$$P(2<X<4)=F(4)-F(2)=1-(1+4)e^{-4}-(1-(1+2)e^{-2})$$

$$=3e^{-2}-5e^{-4}$$

(7)

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

פ' גאמא Gamma

(א)

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$$

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx=-x^{n-1}e^{-x}\Big|_0^\infty+(n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}dx$$

$u=x^{n-1}$ $\quad v'=e^{-x}$

$u'=(n-1)x^{n-2}$ $\quad v=-e^{-x}$

$$=0+(n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}dx=(n-1)\Gamma(n-1)$$

אז קיבלנו

$$\Gamma(n)= \quad \Longleftarrow \quad \begin{cases}\Gamma(1)=1\\ \Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)\end{cases}$$

כאשר n טבעי.

(8)

$$X\sim Gamma(\alpha,\lambda)$$

$$f_X(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} \qquad x>0$$

(א) כאשר $\alpha=1$ מקבלים $exp(\lambda)$.

(ב) הגורם $\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ הוא הקבוע המנרמל את $x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx=\int_0^\infty\left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1}e^{-u}\frac{du}{\lambda}=\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$$

$u=\lambda x$

$\frac{du}{\lambda}=dx$

9

$X \sim U(0,50)$ משך זמן התיקון (בשעות)

(א)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{50} & 0 \le x < 50 \\ 1 & 50 \le x \end{cases}$$

(ב)

$$P(X<2) = \frac{2}{50}$$

(ג)

$$p = P(\text{מכונית נשלחת למוסך מרכזי}) = P(X>5) = 1-P(X<5)$$

$$= \frac{45}{50}$$

$N \sim Bin(10,p)$ מספר מכוניות הנשלחות למוסך המרכזי

$$P(N=3) = \binom{10}{3}\left(\frac{45}{50}\right)^3\left(\frac{5}{50}\right)^7$$

(א) (10)

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(ב)

$$p(X<3) = F_X(3) = 1 - e^{-\frac{3}{\lambda}}$$

$$p(X>5) = 1 - F_X(5) = e^{-\frac{5}{\lambda}}$$

$$p(1.1 < X < 1.5) = F_X(1.5) - F_X(1.1) = 1 - e^{-\frac{1.5}{\lambda}} - 1 + e^{-\frac{1.1}{\lambda}} = e^{-\frac{1.1}{\lambda}} - e^{-\frac{1.5}{\lambda}}$$

(11)

$f_X(x) \geq 0$ לכל x

$$\int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_{0}^{1}(1-x)dx = \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^{0} + x - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \left(0 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} - 0\right) = 1$$

(ב)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \int_{-1}^{x}(x+1)dx & -1 \leq x < 0 \\ \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_{0}^{x}(1-x)dx & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^{x} & -1 \leq x < 0 \\ \left(\frac{x^2}{2} + x\Big|_{-1}^{0} + x - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{x}\right) & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x<-1 \\ \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & -1\le x<0 \\ \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2} & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x \end{cases}$$

ד

$$P(|x|<1) = P(-1\le x\le 1) = F_X(1) - F_X(-1) = 1-0=1$$

$$P(|x|>4) = P(x>4)+P(x<-4) = 1+0 = 1$$

12

$$P(x\ge 0.1)=\frac{1}{2} \qquad x\sim exp(\theta)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & x>0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$0.9 = P(x\ge x) = 1-F_X(x) = 1-\left(1-e^{-\theta x}\right) = e^{-\theta x}$$

$$\frac{1}{2} = P(x\ge 0.1) = 1-F_X(0.1) = 1-\left(1-e^{-0.1\theta}\right) = e^{-0.1\theta} \Rightarrow \theta = 6.93$$

$$0.9 = e^{-6.93x} \Rightarrow x = 0.0152$$

(א) (ב)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 3 \\ \int_3^x \frac{81}{x^4}\,dx & x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \le 3 \\ \left. \frac{81 \cdot x^{-3}}{-3} \right|_3^x & x > 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & x \le 3 \\ -27\left(x^{-3} - 3^{-3}\right) & x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \le 3 \\ 1 - \frac{27}{x^3} & x > 3 \end{cases}$$

(ג)

$$P(X \le 10) = F_X(10) = 1 - \frac{27}{10^3} = 0.973$$

(ד)

$$P(X \ge 15 \,/\, X \ge 5) \underset{\text{חסר זכרון}}{=} P(X > 10) = 1 - F_X(10) = \frac{27}{10^3} = 0.027$$

X - אורך חיים של המכשיר. $\exp\left(\frac{1}{15}\right)$

N - מספר ורידות שנוספו.

$$P(N=n \mid X=x) = e^{-3x}\frac{(3x)^n}{n!} \qquad n=0,1,2,\dots$$

בהינתן אורך חיי המכשיר

$N \sim \text{Poisson}(3x)$

נוסחת ההסתברות השלמה $P(B)=\sum_i P(B|A_i)P(A_i)$

כאשר A_i חלוקה של B או Ω.

$$\underbrace{P(N=n)}_{B} = \sum_{\text{ערכים של } X} P(N=n \mid \underbrace{X=x}_{A_i})\, P(X=x) = \underbrace{\int_0^\infty P(N=n \mid X=x) f_X(x)\, dx}_{\text{אינטגרל על } X}$$

ולכן זה פו' של n.

$$= \int_0^\infty e^{-3x}\frac{(3x)^n}{n!}\underbrace{\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}}_{\text{צפיפות } \exp\left(\frac{1}{15}\right)}dx = \frac{3^n}{n!\cdot 15}\underbrace{\int_0^\infty x^n e^{-(3+\frac{1}{15})x}dx}_{\text{נשלים את האינטגרל להיות צפיפות Gamma}}$$

$$= \frac{3^n}{n!\,15}\cdot\frac{\Gamma(n+1)}{(3+\frac{1}{15})^{n+1}}\underbrace{\int_0^\infty \frac{(3+\frac{1}{15})^{n+1}}{\Gamma(n+1)} x^{n+1-1} e^{-(3+\frac{1}{15})x}dx}_{\text{Gamma}(n+1,\ 3+\frac{1}{15})}$$

$$= \frac{3^n}{n!\,15}\cdot\frac{\overbrace{\Gamma(n+1)}^{n!}}{(3+\frac{1}{15})^{n+1}} = \frac{3^n}{15\,(3+\frac{1}{15})^n(3+\frac{1}{15})} = \frac{1}{46}\left(\frac{45}{46}\right)^n$$

$n=0,1,2,\ldots$

$$P(N>50) = \sum_{n=51}^{\infty}\frac{1}{46}\left(\frac{45}{46}\right)^n = \frac{1}{46}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{45}{46}\right)^{n+51} = \frac{45}{46^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{45}{46}\right)^n$$

$$= \frac{45}{46^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{45}{46}} = \frac{45}{46}$$

15

X - אורך חיי המנשיר.

I - מ"מ ברנולי 0 - השמידו את המכשיר בתיכנון.

1 - לא השמידו.

$$\underset{\text{השמידו}}{P(X\le x\mid I=0)} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & 0\le x \end{cases}$$

$$\underset{\text{לא השמידו}}{P(X\le x\mid I=1)} = 1-e^{-\frac{1}{15}x} \longleftarrow$$ כי התפלגות אקספוננציאלית

עבור $0\le x$

או 0 אחרת

$$P(X\le x) = P(X\le x\mid I=0)\overbrace{P(I=0)}^{0.7} + P(X\le x\mid I=1)\overbrace{P(I=1)}^{0.3}$$

$$= \begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.7 & x=0 \\ 0.7+0.3(1-e^{-\frac{1}{15}x}) = 1-0.3e^{-\frac{1}{15}x} & 0<x \end{cases}$$

לא רציף ולא בדיד

(6

$$\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + (4-2) - \left(2-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + 2 - 1\frac{1}{2} = 1 \;//$$

$f_X(x) \geq 0$ לכל x

(ב

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x x\,dx & 0 \leq x < 1 \\ \int_0^1 x\,dx + \int_1^x (2-x)\,dx & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & x<0 \\ \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x & 0 \le x<1 \\ \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.2x-\frac{x^2}{2}\right|_1^x & 1\le x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x^2}{2} & 0\le x<1 \\ 2x-\frac{x^2}{2}-1 & 1\le x<2 \\ 1 & 2\le x \end{cases}$$

(2

$$p(x\le 1.5) = F_X(1.5) = 2\cdot 1.5 - \frac{1.5^2}{2} - 1 = 0.875$$

$$p\left(\tfrac{1}{2}\le x\le 1\right) = F_X(1) - F_X\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{3}{8}$$

(17)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \int_0^x \frac{\alpha\theta^\alpha}{(\theta+x)^{\alpha+1}}\,dx & x>0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \alpha\theta^\alpha \int_0^x \left(\frac{1}{\theta+x}\right)^{\alpha+1} dx \end{cases} =$$

$y=\theta+x$
$dy=dx$

$$= \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \alpha\theta^\alpha \int_\theta^{\theta+x} \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha+1} dy \end{cases} = \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \alpha\theta^\alpha \left[\left.\frac{y^{-\alpha}}{-\alpha}\right|_\theta^{\theta+x}\right. & x>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ -\theta^{\alpha}\left[(\theta+x)^{-\alpha} - \theta^{-\alpha}\right] & x > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - \left(\frac{\theta}{(\theta+x)}\right)^{\alpha} & x > 0 \end{cases}$$

$$P(X \le 3) = F_X(3) = 1 - \left(\frac{\theta}{(\theta+3)}\right)^{\alpha}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{\alpha\theta^{\alpha} x}{(\theta+x)^{\alpha+1}}\,dx \underset{\substack{y=\theta+x \\ dy=dx}}{=} \alpha\theta^{\alpha}\int_{\theta}^{\infty} \frac{y-\theta}{y^{\alpha+1}}\,dy = \cancel{\alpha\theta^{\alpha}}$$ (18)

$$= \alpha\theta^{\alpha}\left[\int_{\theta}^{\infty} y^{-\alpha}dy - \theta\int_{\theta}^{\infty} y^{-(\alpha+1)}dy\right] = \alpha\theta^{\alpha}\left[\left.\frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{\theta}^{\infty} + \left.\frac{\theta y^{-\alpha}}{\alpha}\right|_{\theta}^{\infty}\right] =$$

$$= \alpha\theta^{\alpha}\left[\left(0 - \frac{\theta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) + \left(0 - \frac{\theta^{1-\alpha}}{\alpha}\right)\right] = \alpha\theta^{\alpha}\left[-\frac{1}{\theta^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)\right] = \frac{-\alpha\theta}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{\theta}{1-\alpha}$$

$X \sim exp(\lambda)$ (20)

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda - t)} dx = \frac{\lambda \cdot e^{-(\lambda-t)x}}{-(\lambda-t)} \Big|_0^\infty = 0 + \frac{\lambda}{(\lambda-t)} = \frac{\lambda}{\lambda-t}$$

$(\lambda > t)$

מגיע 20 (19)