

קובץ תרגילים 1: חזרה מתמטית

1. הוכח או הפוך את הטענות הללו:
 - (א) $(A \cup B)^c \cap C = A^c \cap B^c \cap C^c$
 - (ב) $B \cap (C \cup (A \cup B)^c) = C^c \cup B^c$
 - (ג) אם $A \cap B = A \cap C$ אזי $B = C$

2. k כדורים מפוזרים לתוך n קופסאות זהות. כאשר הכדורים שונים זה מזה נסמן DIFF וכאשר הם זהים נסמן SAME. כאשר כל קופסה יכולה להכיל רק כדור אחד נסמן ONE וכאשר אין מגבלה על מספר הכדורים בקופסה נסמן INF. חשב את מספר האפשרויות בכל אחד מהמקרים:
 - (א) ONE, DIFF
 - (ב) INF, DIFF
 - (ג) ONE, SAME
 - (ד) INF, SAME

3. מתוך 10 ספרי אלגברה ו 6 ספרי חדו"א יש לבחור 2 ספרים, אחד מכל מקצוע כמה זוגות שונים כאלו ניתן לבחור?

4. בניסוי רפואי יש לתת 4 מנות תרופה מסוג A, 3 מנות מסוג B, ו 4 מנות מסוג C. בכמה אופנים ניתן להרכיב טיפול מהמנות הנ"ל?

5. בכמה אופנים ניתן לחלק קבוצה של 30 איש לקבוצות של 4, 6 ו 20 איש?

6. בכיתה 30 תלמידים בכמה אפשרויות הם יכולים להתחלק לשלוש?

7. בכמה צורות ניתן לסדר את הספרות 1, 2, 5 כך שאף ספרה לא תתאים למקומה המקורי?

8. מספר בינארי מורכב מהספרות 0, 1.
 - (א) כמה מספרים בינאריים בני 8 ספרות קיימים (מותרים אפסים מובילים)?
 - (ב) כמה מספרים בינאריים בני 10 וים ו- 5 סים קיימים?
 - (ג) כמה מספרים בינאריים בני 10 וים ו 5 סים קיימים, כך שאין אפסים רצופים?

9. במישור מסומנים 10 ישרים, מהם 4 מקבילים ביניהם ולאחרים אין מקבילים. בכמה נקודות נחתכים ישרים אלו, אם בכל נקודה נפגשים לא יותר משני ישרים?

10. בועידת השלום בין שבדיה, פינלד ונורבגיה מסדרים 8 דגלים בשורה. לרשות המארגנים 12 דגלים: 4 של שבדיה, 4 של נורבגיה ו 4 של פינלנד. בכמה אפשרויות ניתן לסדר את שמינית הדגלים אם ידוע שדגל כל מדינה חייב להופיע לפחות פעמיים בשורה?

11. במשפחה בת 10 ילדים החליטה אם המשפחה להקל מעליה את נטל העבודה. היא החליטה להטיל תורנות שטיפת כלים ותורנות מכולת. את תורנות שטיפת הכלים יבצעו שני ילדים ואת תורנות המכולת יבצע ילד אחר. כמה אפשרויות ישנן לסידור הילדים לתורנות?

12. במטבח ישנם 10 סוגי ירקות. בהנחה שסלט נקבע לפי מרכיביו (ירקות), כמה סוגי סלטים ניתן להכין?

13. קוד הכספומט של מר שכחני מורכב מ 4 ספרות. מר שכחני זוכר שהספרה הראשונה היא 6, השנייה 7 או 8, השלישית 1 או 5 והאחרונה אינה זכורה לו כלל. כמה צירופים עליו לנסות לכל היותר, על מנת להקיש את הקוד המתאים?

14. בכמה אופנים ניתן להכניס 2 כדורים לבנים, 3 כדורים אדומים ו 4 כדורים כחולים ל 9 כדים כך שבכל כד יהיה בדיוק כדור אחד?

15. בכמה אופנים ניתן לחגוג ימי הולדת ל 12 אנשים (מבחינת חודש לידתם בלבד), אם נתון שכל אחד מהאנשים נולד בחודש אחר?

16. כמה פתרונות יש למשוואה $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$? וזאת עבור r_i טבעיים או אפס, r טבעי.

17. בכמה צורות ניתן לפזר $n+k$ כדורים שונים ל n תאים כך שאף תא לא יהיה ריק? (ניתן להכניס יותר מכדור אחד לתא).

18. הראה ש $\binom{2n}{k}$ מקבל מקסימום כאשר $k=n$.

19. הראה שעבור כל n טבעי: $\frac{1}{2n} 2^{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$?

20. כמה מספרים בינאריים (יכולים להתחיל עם אפסים) קיימים אשר אורכם הוא 10 והם או מתחילים ב 000 או נגמרים ב 1111?

21. בטורניר משחקי טניס נערכו 105 משחקים. הטורניר מתנהל כך שכל שחקן משחק אחד עם כל אחד מהמשתתפים האחרים. כמה שחקנים השתתפו בטורניר?

22. חפיסת קלפים מכילה 52 קלפים שונים. בכמה צורות ניתן לחלק קבוצות של 5 קלפים לכל אחד מ 4 שחקנים?

$$.23 \text{ הוכח: } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k! = 0$$

$$.24 \text{ חשב את } \sum_{i=0}^{\infty} ip(1-p)^{i-1} \text{ } .0 < p < 1$$

$$.25 \text{ חשב: } \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \text{ } .0 < \lambda$$

$$.26 \text{ חשב: } \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \text{ } .0 < \lambda$$

$$.27 \text{ חשב: } F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \text{ } .0 < \lambda$$

.28 בהמשך לשאלה הקודמת מצא את הגבולות של $F(x)$ כאשר $x \rightarrow -\infty$ וכאשר $x \rightarrow \infty$.

$$.29 \text{ חשב לפי איזה ערכים של } \alpha \int_0^{\infty} u^{-\alpha} du \text{ מתכנס.}$$

$$.30 \text{ חשב את } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} dx$$

.31 נסה לחשב את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. במידה ולא הצלחת הערך בצורה נומרית (תוכנית c או גיליון excel או כל כלי אחר).

$$.32 \text{ חשב את } \int_0^{16} \int_{x=0}^8 (12 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y) dx dy$$

$$.33 \text{ חשב את } \int_0^1 \int_{x=y}^1 e^{x^2} dx dy$$