

קובץ תרגילים 10:
משתנה מקרי מולטינומי, שונות משותפת,
סכום של מ"מ, משפט הגבול המרכזי

- (1) פרוש אחד של משפט הגבול המרכזי הוא שסכום של מ"מ בלתי תלויים ושווי התפלגות רבים מתפלג בקרוב נורמלית עם תוחלת השווה לסכום התוחלות ושונות השווה לסכום השונות.
 (א) ידוע ש X הוא מ"מ בינומי עם $n=1000$ ו- $p = \frac{1}{4}$. חשב (בקירוב) את $P(X < 100)$.
 (ב) כרטיס רשת מאזין לקו סידרתי של אפסים ואחדים. בכרטיס ישנו רכיב הסוכם את כל הספרות המתקבלות (נסמן את הסוכם: X). ידוע שהספרות המגיעות הם ב"ת והסתברות לקבל 1 היא 0.6. לאחר 10000 ספרות שהגיעו וסוכמו, מצא בקירוב את a כך ש: $P(6000-a < X < 6000+a) = 99\%$.
- (2) יהי X מ"מ בינומי עם פרמטרים (p, n_1) , יהי Y מ"מ בינומי עם פרמטרים (p, n_2) . יהי X ו- Y ב"ת. כיצד מתפלג $X+Y$? הסבר את מדוע התוצאה הגיונית?
- (3) יהיו X ו- Y מ"מ גאומטריים בלתי תלויים בעלי פרמטר p . כיצד מתפלג סכומם? הסבר את תוצאה.
- (4) מחיר 2 מניות (X ו- Y) בשוק המניות הוא מקרי. נאמר שמחיר מניה X הוא בעל תוחלת 10 ושונות 2, כמו כן, מחיר מניה Y הוא בעל תוחלת 20 ושונות 3. נאמר ש X ו- Y מתפלגים נורמלית. ידוע שהשונות המשותפת של שתי המניות היא 1.
 (א) מה ההסתברות שערכם המשותף של שתי המניות יהיה קטן מ 28.
 (ב) במידה ואתה בוחר לקנות את שני המניות הללו, ובמידה ואינך אוהב מניות שמחירם משתנה (אוהב יציבות) האם היית מעדיף שהשונות המשותפת תהייה חיובית או שלילית?
- (5) יהי X מ"מ פואסוני עם פרמטר λ_1 , יהי Y מ"מ פואסוני עם פרמטר λ_2 . יהי X ו- Y ב"ת. כיצד מתפלג $X+Y$?
- (6) במבחן בהסתברות ישנם 20 שאלות. השאלות נוגעים ב-10 נושאים. (נסמן את הנושאים $1, 2, \dots, 10$). כאשר המוצה כותבת את המבחן היא מגרילה את הנושא של כל אחת מהשאלות בצורה הבאה: $P(\text{subject will be } i) = a^i$ (א הוא מספר קבוע).
 (א) חשב את ההסתברות שתהיה מכל נושא שאלה אחת.
 (ב) חשב את ההסתברות שיהיו מנושא 2 ו-10 שאלות וכל שאר השאלות יהיו מנושא 5.
- (7) אחוז הגברים במדינת ישראל המגלחים את הרגליים הוא 10%. מבין מגלחי הרגליים, אחוז הגברים העושים זאת כי הם רוכבי אופניים הוא 70% (N_1), אחוז הגברים העושים זאת בגלל שהם שחיינים הוא 20% (N_2) ואחוז הגברים שזה פשוט עושה להם את זה הוא 10% (N_3) (הנח את ההנחה הלא הגיונית ששלושת הקבוצות זרות). נערך מדגם של 1000 גברים. כתוב את ההסתברות של המאורה הבא: $\{N_1=10, N_2=5, N_3=5\}$.
- (8) הסבר מתי ואיך משתנה מקרי בינומי הוא מקרי פרטי של המשתנה מקרי המולטינומי.
- (9) איציק עומד מעל ללוח הבא חורק גולות לתוך המקומות שבלוח. איציק זורק בסך הכל 4 גולות. אין הגבלה על מספר הגולות היכולות להיכנס לכל תא. המספרים בכל תא מציינים את מספר הנשיקות שאיציק יקבל מציפי על הכנסת הגולה לתא המתאים. ישנה הסתברות שווה שהגולה תיכנס לכל אחד מהתאים.

1	1	1	1	1	1	1	1
0	8	4	4	2	2	2	2

- (א) מה ההסתברות שאיציק לא יזכה באפילו נשיקה אחת?
 (ב) מה ההסתברות שאיציק יזכה ב 5 נשיקות.
 (ג) מה ההסתברות שאיציק יזכה ב 33 נשיקות?

10) יהיו X_1, \dots, X_N משתנים מקריים בלתי תלויים המייצגים את כמות הזמן בימים שהבטריות ($i=1, \dots, N$) מסוגלות לספק חשמל (בכמות הנדרשת). ידוע ש X_i מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר 2. נאמר שעל כל יום של חשמל עבור כל בטריה, מקבלים 20 שקלים. כיצד מתפלג סך הרווח?

11) פרוש נוסף של משפט הגבול המרכזי הוא: ממוצע השבועי של מ"מ בלתי תלויים ושווי התפלגות מתפלג בקרוב נורמלית עם תוחלת השווה לתוחלת של כל אחד מהמ"מ ושונות השווה לשונות מ"מ חלקי מספר המ"מ.
 (א) הזמן בדקות עד שמערכת Windows 2000 תקרוס הוא מ"מ אקספוננציאלי עם פרמטר השווה ל 1/60. הזמן עד לקריסת המערכת אצל מאה משתמשים נמדד, והממוצע חושב, מה ההסתברות (בקירוב) שהממוצע קטן מ 58 דקות?
 (ב) פרופ' בחוג למדעי המחשב מפעיל 5 מחשבים במקביל. רשום ביטוי להסתברות שסך זמן הפעולה של המערכת (סכום זמני הפעולה של כל המחשבים) יהיה גדול מ - 300 דקות. (רמז: מצא את ההתפלגות של סכום של מ"מ אקספוננציאליים בעזרת פונקציה יוצרת מומנטים).
 (ג) השתמש במשפט הגבול המרכזי להעריך את ההסתברות שרשמת בסעיף הקודם.

12) יהיו X ו Y מ"מ אחידים $(0,1)$ ב"ת. יהי Z סכומם. הוכח (באמצעות פונקציה יוצרת מומנטים) ש Z מתפלג לפי הצפיפות הבאה:

$$f(z) = z \text{ עבור } 0 < z < 1$$

$$f(z) = 2-z \text{ עבור } 1 < z < 2$$

0 אחרת.

רמז (חשב את פונקציה יוצרת המומנטים של ההתפלגות לעיל).

13) בישוב קהילתי נערכת הגרלה עבור מגרשים לבניה. ההגרלה נערכת באופן המחזור הבא: רוכב המגרש במסרים הוא מ"מ אחיד בדיד $[10,15]$. אורך המגרש הוא מ"מ אחיד בדיד $[12,13]$.

(א) מהו שטח המגרש הממוצע?
 (ב) 100 משפחות משתתפות בהגרלה. יש מספיק שטח לכולם ולכן ההגרלות הם ב"ת. נאמר ש N_A הוא מספר המשפחות שקיבלו שטח של A מטר מרובע. מה ההסתברות של המאורע הבא: $\{N_{120}=10, N_{130}=3, N_{135}=20\}$