

## קובץ תרגילים 3: תלות/אי-תלות והסתברות מותנה

1. מטילים 2 קוביות הוגנות. נגדיר:  $A$  התוצאה המקסימלית קטנה מ 4.  
 $B$  התוצאה המינימלית שווה ל 3. חשב:  
 א)  $P(A)$   
 ב)  $P(B)$   
 ג)  $P(A|B)$   
 ד)  $P(B|A)$
2. נתונים המאורעות  $A$  ו- $B$  שאינם זרים. כמו-כן נתון:  $P(A \cup B) = 0.7$ ,  
 $P(B) = 0.2$ . הוכח או הפרך את הטענות הבאות:  
 א) אם ידוע בנוסף ש  $A$  ו- $B$  בלתי תלויים, אזי  $P(A) = 5/8$ .  
 ב) אם ידוע בנוסף ש  $A$  ו- $B$  תלויים ו  $P(A \cap B) = 0.1$ , אזי,  
 $P(A|B) < P(B)$ .
3. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:  
 א) לכל שני מאורעות  $A$  ו- $B$  המוגדרים על אותו מרחב הסתברות מתקיים:  $P(A \cup B) < P(A)$ .  
 ב) לכל 3 מאורעות  $A, B, C$  המוגדרים על אותו מרחב הסתברות מתקיים:  
 אם  $P(A|C) = P(B|C)$  אזי  $P(A) = P(B)$ .  
 ג) לכל 3 מאורעות  $A, B, C$  המוגדרים על אותו מרחב הסתברות כאשר  $A$  ו- $B$  זרים מתקיים:  $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$ .  
 ד) לכל 3 מאורעות  $A, B, C$  המוגדרים על אותו מרחב הסתברות מתקיים:  $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$ .  
 ה) לכל 3 מאורעות  $A, B, C$  המוגדרים על אותו מרחב מדגם כאשר  $A$  ו- $B$  בלתי תלויים ו  $A$  ו- $C$  בלתי תלויים ו  $B$  ו- $C$  זרים מתקיים:  
 $P(A \cap (B \cup C)) = P(A)P(B \cup C)$
4. מסל המכיל 30 תפוזים ו 10 תפוחים נבחרים באופן מקרי 4 פירות בזה אחר זה ללא החזרה.  
 א) מה ההסתברות שהפרי הראשון שנבחר הוא תפוח?  
 ב) מה ההסתברות שהפרי שנבחר שני הוא תפוח?
5. משלוח של 25 פריטים נבדק באמצעות שיטת דגימה דו-שלבית כדלקמן:  
 תחילה דוגמים 5 פריטים. אם לפחות אחד מהם פגום דוחים את המשלוח כולו. אם כולם תקינים, בוחרים מדגם נוסף בן 10 פריטים מהפריטים הנותרים. המשלוח כולו נדחה אם לפחות אחד מהפריטים שבמדגם השני פגום ומתקבל אם כולם תקינים. מצא את ההסתברות לכך שמשלוח המכיל 2 פריטים פגומים יתקבל.

6. שני כדים מכילים כל אחד 3 כדורים לבנים ו 2 כדורים שחורים. בוחרים באופן אקראי 2 כדורים מכד אחד ומעבירים לכד השני לאחר מכן מוצאים מהכד השני כדור. מה ההסתברות שמהכד השני הוצא כדור שחור?
7. במפעל 3 קווי יצור. קו ייצור א' מייצר 20% מהתוצרת, קו ייצור ב' 30% מהתוצרת ואת היתר מייצר קו ייצור ג'. אחוז המוצרים הפגומים בכל אחד מהקווים הוא 3%, 4%, 1, 5% בהתאמה. נבחר מוצר באופן אקראי. מה ההסתברות שהוא פגום?
8. לסטודנט נתנו 2 כדים, 3 כדורים לבנים ו 3 כדורים שחורים. הוטל עליו לחלק את 6 הכדורים בין 2 הכדים באופן שלא ישאר כד ריק. אחר-כך קושרים את עיניו והוא מגריל באופן אקראי את אחד משני הכדים וממנו יבחר כדור אחד. אם יגריל כדור לבן יקבל פטור מהקורס 'מבוא להסתברות', אם יגריל כדור שחור יצטרך להבחן. כיצד כדאי לסטודנט לחלק את הכדורים בין 2 הכדים כך שההסתברות לקבל פטור תהיה מקסימלית.
9. 7 כדורים נזרקים באופן אקראי ל 7 תאים. מה ההסתברות שיש תא שבו 3 כדורים אם ידוע שבדיוק 2 תאים ריקים.
10. שלושה אנשים יורים בנפרד לעבר מטרה. ההסתברות לפגיעה הן  $\frac{1}{6}$   $\frac{1}{3}$  בהתאמה.  
(א) מצא את ההסתברות שבדיוק אדם אחד פגע במטרה.  
(ב) אם רק אדם אחד פגע במטרה, מה ההסתברות שזה היה הראשון מבין השלושה.
11. יבואן ישראלי הזמין משלוח סוכר אצל ספק בחו"ל. ההסתברות שספק הסוכר יעמיס את המשלוח על האוניה בארצו היא 0.8. ההסתברות שהאוניה תגיע בשלום ארצה אם הועמס עליה הסוכר היא 0.9. ההסתברות שמשלוח הסוכר שהגיעה ארצה לא ישוחרר בגלל שביתה במכס היא 0.6. ידוע שהסוכר לא הגיע אל היבואן הישראלי. מה ההסתברות שלא נשלח על-ידי הספק?
12. קו תקשורת סדרתי מעביר bit לאחר bit. ההסתברות ש bit יהיה 1 היא 60%. ההסתברות לטעות בקו (הפיכה של 0 ל 1 או 1 ל 0) היא 10%. הצד המקבל קיבל 0 מהי ההסתברות שזוהי טעות.
13. אחד מ 12 מפתחות פותח דלת. אדם בוחר באופן מקרי מפתח ומנסה לפתוח את הדלת. אם לא הצליח הוא בוחר מפתח נוסף מהמפתחות הנותרים וכך ממשיך עד שפותח את הדלת. מצא את ההסתברות ש  
(א) יפתח את הדלת בנסיון הראשון.  
(ב) יפתח את הדלת בנסיון האחרון.

14. חברת ביטוח מחלקת את האוכלוסייה ל 2 סוגים:
- אנשים בעלי סיכון גבוה שהסיכוי שתהיה להם תאונה במשך השנה הוא 0.4.
  - אנשים בעלי סיכון נמוך שהסיכוי שתהיה להם תאונה במשך השנה הוא 0.2.
- 30% מהאנשים הם בעלי סיכון גבוה. מה ההסתברות שלאדם כלשהו תהיה טביעה במשך השנה?
15. זורקים 2 קוביות סימטריות. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A תוצאה זוגית בקוביה הראשונה.
  - B תוצאה זוגית בקוביה השנייה.
  - C סכום התוצאות זוגי.
- הראה כי כל שני מאורעות מבין השלושה בלתי תלויים ואילו 3 המאורעות הללו תלויים.
16. ההסתברות שאדם יחלה במחלה מסויימת היא 0.01. ניתן לבצע בדיקה רפואית לאבחון המחלה. עבור אדם בריא, הסיכוי שהבדיקה תטעה (ותקבע שהוא חולה) הוא 0.05. עבור אדם חולה הסיכוי לטעות בבדיקה הוא 0.2 (קביעה שהאדם בריא).
- (א) מה הסיכוי שהבדיקה תראה שהאדם חולה?
  - (ב) מה הסיכוי שאדם שנבחר באקראי יהיה חולה, אך הבדיקה תטעה, ותקבע שהוא בריא?
  - (ג) נניח שהבדיקה הראתה על מחלה. מה הסיכוי שהנבדק אכן חולה?
  - (ד) מה הסיכוי שאדם שנבחר באקראי יהיה בריא, והבדיקה תקבע שהוא בריא.
17. אסיר נמצא בחדר עגול בעל 6 דלתות זהות לחלוטין. 3 מהדלתות מוליכות למוות, 2 מהדלתות מוליכות לחיים ודלת אחת מחזירה אותו לחדר העגול. האסיר בוחר באופן אקראי דלת. מה ההסתברות שיישאר בחיים אם:
- (א) לאחר הבחירה בדלת שמחזירה אותו לחדר העגול, הבחירה נעשית מתוך 5 הדלתות הנותרות.
  - (ב) לאחר בחירה בדלת שמחזירה אותו לחדר העגול הבחירה נעשית מתוך 6 הדלתות שבחדר.
18. ידוע שבחורף ההסתברות שביום מסויים ירד גשם אם יום לפני כן לא ירד היא  $1/5$ . לכן ההסתברות שביום מסויים ירד גשם אם גם יום לפני כן ירד גשם היא  $4/5$ . האם טענה זו נכונה? הסבר.
19. ההסתברות ליום גשום היא 0.4. אם היום גשום, ההסתברות שיתבטל שיעור שווה ל 0.2. ההסתברות שלא יתבטל שיעור שווה ל 0.86. ביום מסויים התבטל שיעור. מכאן ההסתברות שביום זה ירד גשם היא ?

20. ניסיון מראה ש 70% מבוגרי הקורס הסתברות מבינים היטב את ההבדל בין "מאורעות זרים" ו "מאורעות בלתי תלויים". ההסתברות שתלמיד שאינו מבין יענה נכון על שאלה העוסקת בכך בבחינה היא 0.2. תלמיד מבין יענה נכון על שאלה זו בהסתברות 0.95.
- (א) נילי ענתה נכון על השאלה. מה ההסתברות שהיא באמת מבינה?
- (ב) דני לא ענה נכון על השאלה. מה ההסתברות שהוא בכל זאת מבין?
- (ג) האם אתה/את מבינים? הסבר.