

קובץ תרגילים 4:

משתנים מקריים (לא מהתפלגויות מוכרות)

1. זורקים 2 קוביות הוגנות. נגדיר X התוצאה המקסימלית מבין שתי ההטלות. חשב את ההסתברויות של המאורעות הבאים:

$$\text{(א) } \{\omega: X(\omega)=3\}$$

$$\text{(ב) } \{\omega: X(\omega)<3\}$$

$$\text{(ג) } \{\omega: X(\omega)>3\}^c$$

$$\text{(ד) } \{\omega: 2 \leq X(\omega) \leq 5\}$$

$$\text{(ה) } \{\omega: 1 < X(\omega) < 4\} \cup \{\omega: X(\omega) \geq 5\}$$

$$\text{(ו) } \{\omega: 1 < X(\omega) < 4\} \cap \{\omega: X(\omega) \geq 5\}$$

2. כד מכיל 10 כדורים אדומים ו-8 כדורים שחורים. דוגמים בבת אחת 6 כדורים (דגימה ללא החזרה). נגדיר X משתנה מקרי המונה את מספר הכדורים האדומים במדגם. חשב את פונקציית ההסתברות של X .

3. יהי X משתנה מקרי. פונקציית ההסתברות של X^2 נתונה על-ידי:

$$P(X^2 = a) = \begin{cases} 2/9 & a = 0 \\ 1/3 & a = 1 \\ 4/9 & a = 4 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פונקציית ההסתברות של X נתונה באופן חלקי:

$$P(X = x) = \begin{cases} ? & x = -1 \\ ? & x = 0 \\ 1/4 & x = 1 \\ ? & x = 2 \\ ? & \text{אחרת} \end{cases}$$

- (א) השלם מהנתון את פונקציית ההסתברות של X .
 (ב) בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X .
 (ג) בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X^2 .

4. בהטלת קוביה הוגנת נגדיר משתנה מקרי X באופן הבא: X שווה למספר הנקודות המופיעות על הקוביה אם התקבלה תוצאה זוגית ושווה ל-0 אם התקבלה תוצאה אי-זוגית.

- (א) בנה את פונקציית ההסתברות של X .
 (ב) חשב וסרטט פונקציית התפלגות מצטברת של X

5. בכד m כדורים אדומים ו n כדורים שחורים. מבצעים ניסוי דו שלבי. בתחילה בוחרים באופן אקראי כדור מהכד, אם הוא אדום מחזירים אותו לכד, אם הוא שחור, זורקים אותו. לאחר מכן מוצאים שוב כדור. נגדיר X משתנה מקרי המונה את מספר הכדורים האדומים שהוצאו בשני השלבים. בנה את פונקציית ההסתברות של X . (הנח $(m, n) > 2$).

6. מטילים מטבע הוגן פעמיים. לאחר מכן מטילים אותו שוב כמספר הפעמים שהתקבל 'עץ' בשתי ההטלות הראשונות. נגדיר X משתנה מקרי המונה את מספר הפעמים שהתקבל 'עץ' בכל ההטלות.
(א) בנה את פונקציית ההסתברות של X .
(ב) בנה את פונקציית ההסתברות של X כאשר המטבע אינו בהכרח הוגן וההסתברות לעץ היא p .

7. מחפיסה של M קלפים המסומנים במספרים 1 מוצאים m קלפים עם החזרה בצורה אקראית אחידה (הסתברות של $1/M$ לכל קלף). נגדיר X משתנה מקרי המציין את המספר המקסימלי בין המספרים המסומנים על הקלפים שהוצאו. מצא את פונקציית ההסתברות של X .

8. יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P_X(x) = \begin{cases} ba & a = 0, \dots, b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(א) חשב את הקבוע b .

(ב) חשב $P(X < 4)$.

(ג) בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי X .

9. זורקים קוביה סימטרית פעמיים. נגדיר את המשתנים המקריים הבאים:
 Y הערך המוחלט של הפרש התוצאות.
 X סכום התוצאות בשתי ההטלות.
 Z הערך המקסימלי מבין 2 ההטלות.

(א) בנה את פונקציית ההסתברות של X .

(ב) חשב: $P(X < 5)$

(ג) חשב את פונקציית ההסתברות של Y .

(ד) חשב את פונקציית ההסתברות של Z .

(ה) רואים שמתקיים שלכל $w < M$: $Y < Z < X$. הוכח שבמקרה שכזה

$$F_Y(t) \leq F_Z(t) \leq F_X(t)$$

10. לאדם יש צרור שבו 6 מפתחות. רק אחד מהמפתחות מתאים לפתיחת הדלת. האדם מנסה מפתח, אם הוא לא מתאים הוא מוציאו מהצרור וממשיך כך לנסות עד לפתיחת הדלת. נגדיר משתנה מקרי X מספר המפתחות שניסה עד לפתיחת הדלת (כולל המפתח המתאים).
(א) חשב את פונקציית ההסתברות של X .

11. נתונה פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P_X(x) = \begin{cases} C2^x & x = 1, \dots, N \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

חשב את C .

12. בקופסא n פתקים הממוספרים במספרים 1. מוצאים פתקים עם החזרה בזה אחר זה עד שלראשונה מופיע מספר שהוצא כבר קודם לכן. נגדיר משתנה מקרי X מספר הפתקים שהוצאו במהלך הניסוי. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

13. אדם החליט לקנות מידי שבוע כרטיס להגרלה נושאת פרסים ולהמשיך ולקנות בקניות אלו עד שיזכה לראשונה ואז להפסיק. בכל שבוע ההסתברות לזכות היא p . נגדיר X משתנה מקרי המונה את מספר השבועות בהם קנה האיש כרטיס הגרלה.
(א) הצע מרחב מדגם לניסוי.
(ב) מהם הערכים ש X יכול לקבל?
(ג) בנה את פונקציית ההסתברות של X .
(ד) נגדיר Y מספר השבועות שבהם האיש קנה כרטיס ולא זכה. מהו הקשר בין Y ו X .
(ה) מהם הערכים ש Y יכול לקבל?
(ו) מהי פונקציית ההסתברות של Y ?
(ז) הראה שגם פונקציית ההסתברות של X וגם זו של Y הם פונקציות הסתברות (חיוביות, והסכום על כל הערכים שווה ל 1).

14. מטילים 2 קוביות הוגנות וסוכמים. נגדיר את X להיות 1 כאשר התוצאה היא זוגית, 0 אחרת. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X .

15. כד מכיל 3 כדורים לבנים ו 2 כדורים שחורים. מוצאים מהכד כדורים באקראי בזה אחר זה עד שהוצאו כל הכדורים השחורים. נגדיר משתנה מקרי X - מספר הכדורים הלבנים שהוצאו מהכד. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

16. 3 כדורים שונים פוזרו ל 5 תאים באופן אקראי (ללא הגבלת מקום). נגדיר משתנה מקרי X מספר התאים שבהם נמצא כדור. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

17. כותבים מספר תלת ספרתי בעזרת הספרות 1,2,3,4. בוחרים כל ספרה באקראי (ספרה יכולה לחזור על עצמה). נגדיר משתנה מקרי X מספר הספרות שלא מופיעות במספר התלת ספרתי. רשום את פונקציית ההסתברות של X .

18. בדוק עם הפונקציות הבאות הן פונקציות הסתברות של משתנה מקרי בדיד:

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & k=1, \dots, 50 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & k=1,2,3,\dots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & k=1,2,3,\dots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4} & k=1,2,3,\dots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ו.}$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{3^k} & k=1,3,5,\dots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{87!}{k!(87-k)!} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{87-k} & k=0, \dots, 87 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ז.}$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{e^{-3.5} 3.5^k}{k!} & k=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ט.}$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{e^{-2} 2^k}{k!} & k=1,2,\dots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ח.}$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{k}{21} & k=1,2,\dots,6 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{י.}$$

19. בתיבה יש n כדורים, מתוכם שניים שחורים ($n > 2$).
(א) מוציאים כדור לאחר כדור עם החזרה. מה ההסתברות שנקבל לראשונה כדור שחור בשלב ה- k .
(ב) מוציאים כדור אחר כדור ללא החזרה. מה ההסתברות שנקבל לראשונה כדור שחור בשלב ה- k .
20. מטילים קוביה 3 פעמים. נגדיר משתנה מקרי X מספר הפעמים שהופיעה הספרה 5.
(א) מצא את ההתפלגות של X .
(ב) מצא את ההתפלגות של $Y=2X+1$.