

קובץ תרגילים 5:
משתנים מקריים בדידים מוכרים:
ברנולי, בינומי, גיאומטרי, בינומי-שלילי,
פואסוני, אחיד-בדיד, היפר-גיאומטרי.

1. בצע את הסעיפים הבאים עבור כל אחד מהמשתנים המקריים המופעים בכותרת לעיל:
 - (א) תאר את הפרמטרים שמאפיינים את המשתנים המקריים ואת תחומם. (לדוגמה הפרמטר של משתנה מקרי ברנולי הוא $0 < p < 1$).
 - (ב) פרט את התומך (תחום הערכים שבו המשתנה המקרי עשוי לקבל ערכים בהסתברות חיובית). (לדוגמה התומך של משתנה מקרי ברנולי הוא $\{0, 1\}$).
 - (ג) כתוב את פונקציית מסת ההסתברות של המשתנה המקרי והראה שהיא אכן פונקציית מסת הסתברות (הסכום על התומך הוא 1 והיא אינה מקבלת ערכים שליליים). (דלג על משתנה מקרי היפר-גיאומטרי ומשתנה מקרי בינומי-שלילי).
 - (ד) כתוב את פונקציית ההתפלגות המצטברת של כל משתנה מקרי. שים לב שעבור בינומי, בינומי-שלילי, היפר-גיאומטרי ופואסון, הפונקציה תכיל סכימה.
 - (ה) הסבר בקצרה מהו ה"סיפור" המתאים למשתנה המקרי. (לדוגמה משתנה מקרי גיאומטרי סופר את מספר הניסיונות עד ההצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי בלתי תלויים בעלי הסתברות להצלחה p).
2. כד מכיל a כדורים לבנים ו b כדורים שחורים. מוצאים כדורים מהכד עם החזרה. נגדיר משתנה מקרי X המונה את מספר הכדורים האדומים שהוצאו. כיצד מפולג X ? מה ההסתברות שלא הוצאו כדורים אדומים כלל?
3. הוכח שמשנתנה מקרי גיאומטרי מקיים את תכונת חוסר הזיכרון.
4. מהם התנאים הצריחים להתקיים כך ששני המקרים הבאים יתוארו ע"י משתנה מקרי גיאומטרי. (א) ספירת מספר הזריקות לסל מקו השלוש עד הקליעה הראשונה. (ב) ספירת מספר שיחות הטלפון שמקבלת מוקדנית ב 144 עד שמבקשים ממנה את המספר של אוניברסיטת חיפה.
5. חתול רעב מסתתר ליד גדר שמאחוריה יש אוכל. על מנת להגיע לאוכל, עליו לקפוץ מעל הגדר. ההסתברות שיעבור את הגדר בקפיצה בודדת היא p . הקפיצות בלתי תלויות (החתול לא מתעייף וכו').
 - (א) מה ההסתברות שיגיע לאוכל לפני הקפיצה הרביעית?
 - (ב) אם החתול לא עבר את הגדר עד הקפיצה השלישית, מה ההסתברות שלא יעבור אותה עד הקפיצה העשירית?
6. סטודנט נבחן בבחינה אמריקאית עם 10 שאלות כך שבכל שאלה 4 אפשרויות ורק אחת נכונה. הסטודנט מחליט להסתמך על הכוח העליון ולנחש את התשובות. מה ההסתברות שיעבור את הבחינה (יקבל 6 ומעלה).

7. מספר המקררים הנמכרים ביום בחנות מסוימת הוא משתנה מקרי פואסוני עם $\lambda=2$. אם ביום מסוים נמכרים לפחות 2 מקררים מקבל המוכר בונוס. (א) מה ההסתברות שבמשך שבוע עבודה של 6 ימים יקבל המוכר בונוס 3 פעמים לפחות?
 (ב) שבוע נחשב גרוע אם המוכר מקבל בונוס פחות מ- 3 פעמים. מה ההסתברות שהשבוע הראשון מתחילת השנה יהיה השבוע העשירי?
 (ג) מה ההסתברות שהשבוע השלישי מתחילת השנה יהיה השבוע העשירי?
8. כדי להרשיע נאשם במשפט עם 12 מושבעים, לפחות 9 מושבעים צריכים להצביע 'אשם'. ידוע מהעבר כי: אם הנאשם אשם ההסתברות לזיכוי היא 0.2, אם הנאשם חף מפשע ההסתברות להרשעתו היא 0.1, 65% מכלל הנאשמים אשמים. מה ההסתברות שאדם יורשע.
9. בכיתה 5 בניס 1 ו 4 בנות, מתוכם נבחר ועד בן 3 חברים. נגדיר משתנה מקרי X - מספר הבנים בועד. מהי פונקציית מסת ההסתברות של X ?
10. מטבע הוגן נזרק עד שמופיע $k+1$ פעמים 'זנב' ואז סופרים את מספר הראשים שהתבלו. מה ההסתברות שמספר זה יהיה n ?
11. צייר את פונקציית מסת ההסתברות של משתנה מקרי בינומי עם $n=10$ ו- $p=1/2$. הסבר במילים כיצד ישתנה הציור כאשר $p=0.9$ וכאשר $p=0.1$.
12. נגדיר את X להיות מ"מ הסופר את מספר הכישלונות בסדרת ניסויי ברנולי בלתי תלויים עם פרמטר להצלחה p עד להצלחה ה- k . מצא את פונקציית מסת ההסתברות של X . (לאיזה משתנה מקרי X דומה? מה הקשר?)
13. מכשיר צופן ושידור משתמש באותות 0 ו 1. ההסתברות שאות הנשלח במכשיר מתקבלת משובשת היא 0.2. מפקד מעוניין לשלוח הודעה בת 10 אותות. לשם בטחון הוא משדר כל אות 5 פעמים. המפענח מקבל את השדר, מפענח כל סידרה של 5 אותות בשיטת הרוב (לדוגמה יקבל אות 01001 ויפעח כי יש יותר אפסים). מה ההסתברות שההודעה שנשלחה תפוענח בצורה מוטעית?
14. לפנינו k תאים ממוספרים. זורקים כדורים לתאים באופן בלתי תלוי זה בזה. ההסתברות שכדור יפול לתא I ($I=1, \dots, k$) שווה ל P_i . נגדיר X_i מספר הכדורים שנפלו לתא ה- i . מהי התפלגות X_i ?
15. מספר הסכמי השלום הנחתמים במזרח התיכון הוא משתנה מקרי פאוסוני עם פרמטר של 1.9 כל 10 שנים. נגדיר את X מספר ההסכמים הנחתמים בשנה. כיצד מתפלג X ? מה ההסתברות שבשנה מסוימת יהיו יותר מהסכם שלום אחד?