

קובץ תרגילים 6:

מומנטים של משתנים מקריים בדידים

1. בהטלת קוביה נגדיר את המשתנה המקרי Y באופן הבא: Y שווה למספר הנקודות המופיעות אם התוצאה אי-זוגית או שווה ל-0 אם התוצאה זוגית. חשב את התוחלת והשונות של Y .
2. חשב את התוחלת של מ"מ בינומי עם פרמטרים n ו- p בשני אופנים:
 - (א) באמצעות סכום של משתנים מקריים ברנולי.
 - (ב) ע"י חישוב "פשוט" של סכום על ערכים כפול הסתברויות.
3. נגדיר את מקדם ההשתנות להיות סטיית התקן (שורש השונות) חלקי התוחלת. מהו מקדם ההשתנות של משתנה מקרי פאוסוני עם פרמטר λ ? ניתן להשתמש בטבלת התפלגויות.
4. יהי X משתנה מקרי ו- $Y=f(X)$ פונקציה של משתנה מקרי ולכן גם משתנה מקרי. כתוב את הביטויים הבאים במונחי $E(X)$ ו- $V(X)$.
 - (א) $E(Y)$ כאשר $f(t)=a t + b$.
 - (ב) $V(Y)$ כאשר $f(t)=a t + b$.
 - (ג) הסבר באופן אינטואיטיבי מדוע $V(Y)$ אינו מושפע מ- b .
5. יהי X משתנה מקרי המקבל את הערכים:

$a-n \qquad a-n+1 \qquad \dots \qquad a-1 \qquad a$

 כל אחד מהערכים הללו מתקבל בהסתברות שווה.
 - (א) חשב את $E(X)$.
 - (ב) חשב את $V(X)$. (השאר כביטוי "מלוכלך").
6. יהי X משתנה מקרי, ידוע כי $E(X)=20$ ו- $V(X)=2$, מהו המומנט השני של X ?
7. בכד 10 כדורים: 3 ירוקים ו-7 אדומים. מוציאים 2 כדורים. נגדיר X מספר הכדורים האדומים שהוצאו. חשב את התוחלת והשונות של X .
 - (א) כאשר ההוצאה עם החזרה.
 - (ב) כאשר ההוצאה היא ללא החזרה.
8. מפעל מסוים שולח את מועמדיו לעבודה למבחני קבלה במכון מסוים. עלות מבחן הקבלה הוא 2000 שקלים. ידוע ש 95% מהמועמדים אינם עומדים במבחני הקבלה הללו. המפעל מרוויח במוצע על כל עובד כזה בחודש הראשון לעבודתו 20000 שקלים. מהי תוחלת הרווח של המפעל ממועמד בחודש הראשון לעבודתו?

9) הוכח שעבור משתנה מקרי אי-שלילי X בעל פונקציית התפלגות מצטברת

$$E(X) = \sum_{t=0}^{\infty} (1 - F_X(t))$$

10) את התוחלת של $Y=g(X)$, (משתנה מקרי שהוא פונקציה של משתנה מקרי) ניתן לחשב בשתי דרכים.

דרך 1) למצוא את פונקציית ההסתברות של Y ולחשב ע"י סכום על ערכים כפול הסתברויות.

דרך 2) לחשב: $\sum g(x)P(X=x)$

X הוא תוצאת זריקת קוביה הוגנת (מקבל ערכים 1,2,3,4,5,6). נגדיר את Y להיות 2 כאשר X זוגי ו-1 כאשר X אי-זוגי.

א) חשב את פונקציית ההסתברות של Y .

ב) חשב את $E(Y)$ לפי דרך 1.

ג) חשב את $E(Y)$ לפי דרך 2.

ד) חשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .

ה) חשב את $E(Y)$ כפי שתואר בשאלה 9.

11) חשב את פונקציית ההסתברות המצטברת של משתנה מקרי גאומטרי עם פרמטר p . עבור אילו ערכים של t הפונקצייה מוגדרת?

12) הראה שהתוחלת והשונות של משתנה מקרי פואסוני שווים באמצעות חישוב פונקציית ההסתברות המצטברת, ולאחר מכן חישוב מומנטים.

13) מהו הערך של פונקציית ההסתברות המצטברת בנקודה $t=0$.

14) ענה בקפידה:

א) מהו הקשר בין המומנט הראשון בריבוע והמומנט השני כאשר השונות שווה ל-0?

ב) נאמר שמשתנה מקרי X הוא מנוון אם קיים a כך ש $P(X=a)=1$. מהי פונקציית ההסתברות המצטברת של X ?

ג) הראה שהשונות של X היא 0.

15) דמיון סדרת ניסויי ברנולי בלתי תלויים עם פרמטר הצלחה p .

א) הסבר מדוע משתנה מקרי בינומי שלילי עם פרמטרים p ו k הוא סכום של k משתנים מקריים גאומטריים.

ב) בעזרת א, חשב את התוחלת של המשתנה הבינומי שלילי (השווה עם טבלת התפלגויות).

16) סטודנט לראיית חשבון צריך לעבור בהצלחה 2 בחינות חיצוניות בכדי לקבל את התואר. נניח שהבחינות בלתי תלויות בינן וההסתברות לעבור בהצלחה כל אחת מהבחינות היא 0.6. מהי תחולת ושונות מספר הבחינות שייבחן הסטודנט עד שיקבל את התואר.

17) ברשימת מספרי הטלפון התלויה במזכירות החוג, רשומים 30 מספרי טלפון. 10 מהמספרים הרשומים אינם נכונים עקב שינויים ארציים במספרי הטלפון. המזכירה מחייגת ביום מסוים ל 7 מספרי טלפון שונים. מהי תוחלת ושונות מספרי הטלפון השגויים שחייגה.

18) נסתכל על התפלגות בינומית עם פרמטרים n ו p . ונסתכל גם על התפלגות היפר-גאומטרית עם פרמטרים n גודל המדגם, M גודל האוכלוסייה ו N מספר הפריטים ה"מיוחדים" באוכלוסייה (שאותם המשתנה המקרי סופר). ניתן להראות שכאשר M ו N שואפים ל אינסוף כך שהיחס בין M ל N נשאר קבוע, אז ההתפלגות ההיפר-גאומטרית שואפת להתפלגות הגיאומטרית (פו' ההתפלגות נהיות דומות).
 א) הסבר באופן אינטואיטיבי את התופעה.
 ב) מהי התוחלת של ההתפלגות ההיפר-גאומטרית (השתמש בטבלה)?
 ג) כיצד ניתן להסביר את התוחלת הזו באמצעות מה שתואר לעיל?

19) נאמר ש $I_A(x)$ הוא פו' אינדיקטור של x לפי הקבוצה A . זאת אומרת ש- האינדיקטור מקבל 1 כאשר x שייך ל A ומקבל 0 אחרת. הסבר מדוע $E(I_A(X)) = P(A)$.

20) ישנם משתנים מקריים שעבורם התוחלת היא אין-סוף!

א) הראה שהפו' הבאה היא פו' מסת הסתברות: $P_x(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

ב) הראה שהתוחלת שווה לאין סוף.

(השתמש בעובדה שהסכום $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ מתבדר).