

קובץ תרגילים 7:

משתנים מקריים רציפים חלק א'

1. בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם הפונקציה היא פונקצית צפיפות:

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & x > \theta \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & x > 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ה.}$$

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ו.}$$

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} 0.2e^{-2x} + 0.9e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ז.}$$

$$0 < x < 2 \quad \text{עבור} \quad f(x) = 1 - |1 - x| \quad \text{ח.}$$

$$-\infty < x < \infty \quad \text{עבור} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-|x-\mu|/\sigma} \quad \text{ט.}$$

$$0 < x < \infty \quad \text{עבור} \quad f(x) = \frac{1}{4} xe^{-x/2} \quad \text{י.}$$

2. יהי X מ"מ. בכל אחד מהסעיפים הבאים חשב את c כך ש- $f_X^{(x)}$ תהיה פונקצית הצפיפות של המ"מ X :

$$א. f_X^{(x)} = \begin{cases} \frac{c}{x} & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$ב. f_X^{(x)} = \begin{cases} c(x-a) & a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ c(b-x) & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \end{cases}$$

כאשר a, b ידועים.

• צייר את $f_X(x)$ וחשב $P(x > \frac{a+b}{2})$

$$ג. f_X^{(x)} = \begin{cases} ce^{-3x}x^3 & x > 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$ד. f_X^{(x)} = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & 0 \leq x \leq c \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

• חשב $P(1/2 < X < 5/2)$, $P(X < 2)$

$$ה. f_X^{(x)} = \begin{cases} ce^{-\theta(x-\alpha)} & x > \alpha, \theta > 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

3. כמות הלחם (במאות ק"ג) שמאפיה מוכרת ביום היא מ"מ X עם פונקצית צפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq 3 \\ c(6-x) & 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצא את הערך c כך ש- (x) תהיה פונקצית הצפיפות של מ"מ X .
 ב. מהי ההסתברות שמנת לחם שתימכר ביום תהיה בין 150 ל-450?

4. נזיר מתבודד מתלמד ממתין במערה מעל אפיק נחל במדבר יהודה. עקב היותו נזיר מתלמד הוא עדיין לא התייצב והבדידות עלולה לערער את נפשו. בנחל נוהגים לעבור בדווים מדי מספר שבועות. כאשר בדווי עובר, הנזיר שואב עידוד. הזמן בימים בין שני מעברים עוקבים של בדויים הוא משתנה מקרי אקספוננציאלי עם תוחלת של 28.5 ימים.

(א) חשב את ההסתברות שהנזיר יהיה בודד לתקופה כפולה מהתוחלת.

(ב) הנזיר אינו יודע כיצד להשתמש במ"מ רציפים, אבל הוא מכיר את אי שוויון מרקוב. כיצד הוא מעריך (חוסם) את ההסתברות שימתין יותר מ 105 ימים בבדידות?

(ג) נפשו של הנזיר תתערער במידה וימתין לבדו למשך מיותר מ 100 ימים. במידה והמתין כבר 99 ימים, מה ההסתברות שנפשו תתערער בתקופת הבדידות הנוכחית?

5. השתמש בפוי יוצרת מומנטים של משתנה מקרי אקספוננציאלי לחשב את התוחלת.

6. תהי $F(x)$ פונקציית ההתפלגות המצטברת של המ"מ X נתונה ע"י :

$$F(x) = 1 - (1+x)e^{-x}, x > 0$$

א. חשב את $P(2 < X < 4)$, $P(X > 3)$, $P(X < 1)$

ב. הצג את פונקציית הצפיפות של המ"מ X .

7. נתון : $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ הוכח :

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{א})$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{עבור } n \text{ טבעי.} \quad (\text{ב})$$

8. התייחס למשתנה מקרי $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$.

א. הראה שמשנתנה מקרי אקספונציאלי הוא מקרה פרטי.

ב. הראה שהאינטגרל על פו' הצפיפות (של gamma) שווה לאחד.

9. מכוניות מקולקלות מוכנסות לתיקון במוסד מקומי. מיד עם הגעת מכונית מוערך זמן התיקון הנדרש. אם זמן התיקון הוא 5 שעות לכל היותר, המכונית מתוקנת במוסד המקומי, אם זמן התיקון עולה על 5 שעות, המכונית נשלחת לתיקון במוסד המרכזי.

משך זמן תיקון מכונית בשעות הוא מ"מ רציף X בעל פונקציית צפיפות הבאה :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{50} & 0 < x < 50 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. הצג את פונקציית ההתפלגות של משך זמן תיקון מכונית הנשלחת למוסד המרכזי.

ב. חשב את ההסתברות שמשך תיקון מכונית במוסד המקומי קטן משעתיים.

ג. ביום מסויים הגיעו למוסד 10 מכוניות לתיקון. הנח אי-תלות בין זמני התיקון של המכוניות וחשב את ההסתברות ש בדיוק 3 מהן נשלחו למוסד המרכזי.

10. נתונה פונקציית התפלגות הבאה :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. מצא את $f_X(x)$

ב. חשב $P(X < 3)$, $P(X > 5)$, $P(1.1 < X < 1.5)$

11. נתונה הפונקציה הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. הראה כי x היא פונקציית צפיפות.

ב. מצא את $F(x)$.

ג. חשב את $P(|X| < 1)$ $P(|X| > 4)$

12. יהי X מ"מ המפולג $\exp(\theta)$. נתון ש: $P(X \geq 0.1) = 1/2$

מצא את x כך ש $P(X \geq x) = 0.9$. במידה ו X מייצג אורך חיים של רכיש, מה המשמעות של אותו x שמצאת?

13. אורך חיי מערכת הינו מ"מ רציף בעל פונקצית הצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{81}{x^4} & x > 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

- א. הצג את $F(x)$.
 ב. מהי ההסתברות שהמערכת תפעל לכל היותר 10 שעות.
 ג. ידוע שהמערכת פועלת מזה 5 שעות. מה ההסתברות שתפעל לפחות עוד 10 שעות?

14. מכשיר ציטוט הוטמן במשרדי כח 17, ברמאללה בתחילת השבוע. ידוע שמספר הידיעות שהשב"כ קולט ביום דרך המכשיר הוא משתנה מקרי פואסוני עם ממוצע של 3. אורך חיי מכשיר הציטוט הוא משתנה מקרי אקספוננציאלי עם ממוצע של 15 יום. מה ההסתברות שעד שהמכשיר יתפס, השב"כ יקלוט יותר מ 50 ידיעות. (ניתן להשאיר את התשובה כסכום).

15. בהמשך לשאלה הקודמת... מייד לאחר הטמנת המכשיר, מבצעים אנשי כח 17 חיפוש מדוקדק במשרדם. ישנו סיכוי של 0.7 שימצאו את המכשיר (וישמידו אותו). תאר במדויק את אורך חיי המכשיר? האם זה משתנה מקרי רציף או בדיד?

16. נתונה הפונקציה:

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

- א. הראה כי $f(x)$ היא פונקצית צפיפות.
 ב. מצא את פונקצית ההתפלגות המצטברת.
 ג. חשב את: $P(X \leq 1.5)$; $P(1/2 \leq X \leq 1)$.

17. תהא $f(x)$ נתונה ע"י:

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} \frac{\alpha \theta^\alpha}{(\theta + x)^{\alpha+1}} & x > 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

הצג את $F(x)$ וחשב את $P(X \leq 8)$.

18. חשב את התוחלת של המ"מ משאלה 17.

19. יהי X מ"מ בעל פונקצית הצפיפות הבאה:
 חשב את $P(1 \leq |X| \leq 2)$.

20. חשב את פוי' יוצרת מומנטים של משתנה מקרי אקספוננציאלי (ניתן להעזר בפוי' צפיפות של gamma).