

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

תשובות למבחן גמר, מועד ב'

26.7.2006

מרצים: פרופ' גדעון וייס, מר. יוני נצרת.
מתרגלים: מר. דרור קלודה, מר. מרק שוחט.

תשובות לשאלה 1:

(א) מרחב המצבים הוא $\{0,1,2,3,4\}$.

להלן קצבי המעבר: $0 \xrightarrow[\mu]{\lambda} 1 \xrightarrow[2\mu]{\lambda} 2 \xrightarrow[2\mu]{\lambda} 3 \xrightarrow[2\mu]{\lambda} 4$ ($\mu = 1/3, \lambda = 3$)

(ב) להלן משוואות שווי המשקל:

$$(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\sum_{k=0}^4 \pi_k = 1$$

אנו יודעים שאלו פתרונות המשוואות:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3} + \frac{\lambda^4}{8\mu^4}} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{4} + \frac{2^4}{8}} = \frac{1}{9}$$

$$\pi_n = \pi_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{9} \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{2}{9}$$

$$\pi_2 = \frac{2}{9} \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{2}{9}$$

$$\pi_3 = \frac{2}{9} \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{2}{9}$$

$$\pi_4 = \frac{2}{9} \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{2}{9}$$

$$0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot (\pi_2 + \pi_3 + \pi_4) = \frac{14}{9} \quad (\text{ג})$$

$$\pi_4 = \frac{2}{9} \quad (\text{ד})$$

(ה) לפי נוסחת ליטל: $W = \frac{L}{\lambda^*}$ כאשר:

$$L = \sum_{k=0}^4 k \cdot \pi_k = \sum_{k=1}^4 k \cdot \pi_k = \frac{2}{9} (1 + 2 + 3 + 4) = \frac{20}{9} \approx 2.2$$

$$\lambda^* = \lambda(1 - \pi_4) = \frac{14}{9} \approx 1.6$$

$$W = \frac{20}{14} \approx 1.4$$

תשובות לשאלה 2:

$$0 \xrightarrow{\lambda} 1 \xrightarrow{\lambda} 2 \dots \quad (\text{א})$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(ב)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

כל המצבים חולפים.
המצב ההתחלתי הוא 0.

$$P_{ij}(t) = 0 \quad j < i \quad (\text{ג})$$

$$P_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} \quad i \leq j$$

$$P_{ij}'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik} P_{kj}(t) = -\lambda P_{ij}(t) + \lambda P_{i+1,j}(t) \quad (\text{ד})$$

(ה) נציב:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!} \frac{d}{dt} (e^{-\lambda t} t^{j-i}) &= -\lambda \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} + \lambda \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i-1}}{(j-i-1)!} \\ -\lambda e^{-\lambda t} t^{j-i} + e^{-\lambda t} (j-i) t^{j-i-1} &= -\lambda e^{-\lambda t} t^{j-i} + e^{-\lambda t} t^{j-i-1} (j-i) \end{aligned}$$

וקבלנו שוויון.

תשובות לשאלה 3:

(א) נסמן את הסתברות לזכות כאשר מתחילים במצב n ב- V_n . אם כך:

$$V_0 = 0$$

$$V_N = 1$$

$$n = 1, \dots, N-1 \quad V_n = \frac{1}{2}V_{n-1} + \frac{1}{2}V_{n+1}$$

נציב $V_n = \frac{n}{N}$ ונראה שהוא מקיים את המשוואות הנ"ל.

(ב) נסמן את תוחלת מספר ההימורים עד לזכייה או פשיטת רגל ב H_n . אם כך:

$$H_0 = 0$$

$$H_N = 0$$

$$n = 1, \dots, N-1 \quad H_n = 1 + \frac{1}{2}H_{n-1} + \frac{1}{2}H_{n+1}$$

נציב $H_n = n(N-n)$ ונראה שהוא מקיים את המשוואות הנ"ל.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.