החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

תשובות למבחן גמר, מועד ב'

26.7.2006

מרצים: פרופ' גדעון וייס, מר. יוני נצרתי.

מתרגלים: מר. דרור קלודה, מר. מרק שוחט.

תשובות לשאלה 1:

א) מרחב המצבים הוא $\{0,1,2,3,4\}$.

להלן קצבי המעבר: $0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} 1 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} 2 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} 3 \underset{2\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} 4$ ($\lambda = 2$, $\mu = 1$).

ב) להלן משוואות שווי המשקל:

$$\begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{4}\pi_k = 1$$

אנו יודעים שאלו פתרונות המשוואות:

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = \frac{1}{1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}+\frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_2}{\mu_3}+\frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_2}{\mu_3}\frac{\lambda_3}{\mu_4}} =$$

$$\frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}+\frac{\lambda^3}{4\mu^3}+\frac{\lambda^4}{8\mu^4}} = \frac{1}{1+2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{4}+\frac{2^4}{8}} = \frac{1}{9}$$

$$\pi_n = \pi_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{9}\frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{2}{9}$$

$$\pi_2 = \frac{2}{9}\frac{\lambda}{2\mu} = \frac{2}{9}$$

$$\pi_3 = \frac{2}{9}\frac{\lambda}{2\mu} = \frac{2}{9}$$

$$\pi_4 = \frac{2}{9}\frac{\lambda}{2\mu} = \frac{2}{9}$$

ג) $0\cdot\pi_0 + 1\cdot\pi_1 + 2\cdot(\pi_2+\pi_3+\pi_4) = \frac{14}{9}$

ד) $\pi_4 = \frac{2}{9}$

ה) לפי נוסחת ליטל: $W = \frac{L}{\lambda^*}$ כאשר:

$$L = \sum_{k=0}^{4} k\cdot\pi_k = \sum_{k=1}^{4} k\cdot\pi_k = \frac{2}{9}(1+2+3+4) = \frac{20}{9} \approx 2.2$$

$$\lambda^* = \lambda(1-\pi_4) = \frac{14}{9} \approx 1.6$$

$$W = \frac{20}{14} \approx 1.4$$

תשובות לשאלה 2:

א) $0 \xrightarrow{\lambda} 1 \xrightarrow{\lambda} 2 \cdots$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ב)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

כל המצבים חולפים.
המצב ההתחלתי הוא 0.

ג) כאשר $j < i$ $P_{ij}(t) = 0$.

כאשר $i \le j$ $P_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$

ד) $$P_{ij}'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik} P_{kj}(t) = -\lambda P_{ij}(t) + \lambda P_{i+1,j}(t)$$

ה) נציב:

$$\frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!} \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t} t^{j-i}) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} + \lambda \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i-1}}{(j-i-1)!}$$

$$-\lambda e^{-\lambda t} t^{j-i} + e^{-\lambda t}(j-i) t^{j-i-1}) = -\lambda e^{-\lambda t} t^{j-i} + e^{-\lambda t} t^{j-i-1}(j-i)$$

וקבלנו שוויון.

תשובות לשאלה 3:

א) נסמן את הסתברות לזכות כאשר מתחילים במצב n ב- V_n. אם כך:

$$V_0 = 0$$

$$V_N = 1$$

$$V_n = \frac{1}{2}V_{n-1} + \frac{1}{2}V_{n+1} \qquad n = 1,\dots, N-1$$

נציב $V_n = \frac{n}{N}$ ונראה שהוא מקיים את המשוואות הנ"ל.

ב) נסמן את תוחלת מספר ההימורים עד לזכייה או פשיטת רגל ב H_n. אם כך:

$$H_0 = 0$$

$$H_N = 0$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2}H_{n-1} + \frac{1}{2}H_{n+1} \quad n = 1,\dots, N-1$$

נציב $H_n = n(N-n)$ ונראה שהוא מקיים את המשוואות הנ"ל.