

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

## מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן גמר, מועד ב'

26.7.2006

מרצים: פרופ' גדעון וייס, מר. יוני נצרתי.  
מתרגלים: מר. דרור קלודה, מר. מרק שוחט.

### הנחיות

- משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: אסור.
- יש לענות על כל השאלות.
- בכל מקום בו לא מצוין במפורש כי נדרש הסבר יש לענות בקצרה.
- במקומות בהם מצוין כי נדרש הסבר יש לתת הסבר קצר ומנומק.
- אין להחזיר את שאלוני הבחינה.
- כל סעיף הוא 10 נקודות.
- סה"כ 12 סעיפים, 120 נקודות.

### שאלה 1:

להלן מודל של תחנה דלק:

- בתחנת דלק יש 2 משאבות ומקום ל 4 מכוניות.
- מכוניות מגיעות לתחנה על פי תהליך פואסון עם קצב  $\lambda = 2$  מכוניות בדקה .
- זמן התדלוק אצל משאבה הוא משתנה מקרי אקספוננציאלי עם ממוצע  $1/\mu = 1$  דקה.
- מכוניות אשר מגיעות כאשר התחנה מלאה הולכות לאיבוד (אינן מקבלות שרות).
- נסמן ב  $X(t)$  את מספר המכוניות הנמצאות בתחנה בזמן  $t$  (דקות).
- הנח מצב יציב עבור הסעיפים הרלוונטיים.

(א) תאר את התהליך  $X(t)$  כתהליך קפיצה מרקובי.  
(רשום דיאגרמת מצבים וציין מהם קצבי המעבר).

(ב) רשום את משוואות שווי המשקל של התהליך וחשב את ההסתברויות הגבוליות של התהליך.

(ג) מהי תוחלת מספר המשאבות העסוקות כל רגע?

(ד) מהי פרופורציית המכוניות אשר הולכות לאיבוד?

(ה) מהי תוחלת זמן השהייה של מכונית במערכת?

## שאלה 2:

יהי  $\{N(t), t \geq 0\}$  תהליך פואסון (מציין את מספר המופעים בזמן  $[0, t]$ ).

(א) תאר את התהליך  $\{N(t), t \geq 0\}$  כתהליך קפיצה מרקובי.  
(תאר דיאגראמת מצבים וציין מהם קצבי המעבר).

(ב) תאר את שרשרת המרקוב המשוכנת.  
(תאר מטריצת המעבר וסווג את המצבים לחולפים/מתמידים).

(ג) נסמן:  $P_{ij}(t) = P(N(t) = j | N(0) = i)$ .

רשום במפורש את  $P_{ij}(t)$ .

הפרד בין המקרה בו  $j < i$  למקרה שבו  $i \leq j$ .

(ד) מהי המשוואה האחורית עבור  $P_{ij}(t)$  כאשר  $i < j$ ?  
רשום את המשוואה במפורש.

(ה) השתמש בסעיף ד' בכדי להוכיח את סעיף ג'.

## שאלה 3:

להלן מודל מהמר:

- מהמר מבצע סדרה של הימורים בלתי תלויים.
- כל הימור הוא רווח או הפסד של 1.
- הסיכויים לרווח והפסד בכל הימור שווים.
- המהמר מתחיל עם הון התחלתי של  $X_0 = n$ ,  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ .
- המהמר ממשיך להמר עד שהוא מגיעה ל 0 (פושט רגל) או ל N (זוכה).

(א) הוכח שהסתברות שהמהמר יזכה היא  $\frac{n}{N}$ .

(ב) הוכח כי תוחלת מספר ההימורים עד לזכייה או לפשיטת רגל היא  $n(N - n)$ .

# בהצלחה

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.