החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן גמר, מועד ג'

8.12.2006

מרצים: פרופ' גדעון וייס, מר. יוני נצרתי.
מתרגלים: מר. דרור קלודה, מר. מרק שוחט.

הנחיות

- משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: אסור.
- יש לענות על כל השאלות.
- בכל מקום בו לא מצוין במפורש כי נדרש הסבר יש לענות בקצרה.
- במקומות בהם מצוין כי נדרש הסבר יש לתת הסבר קצר ומנומק.
- אין להחזיר את שאלוני הבחינה.
- כל סעיף הוא 10 נקודות.
- סה"כ 12 סעיפים, 120 נקודות.

שאלה 1:
נתונה שרשרת מרקוב בזמן בדיד בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3,4\}$.

נתונה מטריצת מעבר:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן: $T_k = \min\{n \geq 1 : X_n = k\}$ - זהו "זמן הפגיעה" במצב k.

א) סווג את מצבי השרשרת: מהם המצבים המתמידים, מהם המצבים החולפים, מהן מחלקות הקשירות.

ב) הראה ש - $\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ היא ההתפלגות הסטציונרית של השרשרת.

ג) מהי $E[T_2 \mid X_0 = 2]$?

ד) מהי $P(T_1 = 6 \mid X_0 = 1)$?

ה) מהי $P(X_2 = 3 \mid T_1 = 5, X_0 = 1)$?

שאלה 2:

נתון N_t תהליך פואסון עם פרמטר קצב λ.
נסמן ב T_k את זמן ההגעה ה – k: $T_k = \min\{t \geq 0 : N_t = k\}$.
הוכח באופן קצר ומדויק את הטענות הבאות:

א) $P(T_1 > t/2 \mid N_t = 1) = 1/2$.

ב) $N_s \mid N_t \sim Bin(n, \frac{s}{t})$ עבור $0 \leq s \leq t$.

ג) $Cov(N_t, N_s) = \lambda s$ עבור $s \leq t$.
תזכורות:

a. $Cov(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY)$.

b. $Cov(X+Z,Y) = Cov(X,Y) + Cov(Z,Y)$.

c. אם $Z \sim Poisson(\mu)$ אז $Var(Z) = \mu$.

ד) $\sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \int_t^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} ds$.

שאלה 3:

להלן מודל מהמר:

- מהמר מבצע סדרה של הימורים בלתי תלויים.
- כל הימור הוא רווח או הפסד של 1.
- הסיכויים לרווח והפסד בכל הימור שווים.
  המהמר מתחיל עם הון התחלתי של $X_0 = n$. $n \in \{0,1,...,N\}$.
- המהמר ממשיך להמר עד שהוא מגיעה ל 0 (פושט רגל) או ל N (זוכה).

א) הוכח שההסתברות שהמהמר יזכה היא $\frac{n}{N}$.

ב) הוכח כי תוחלת מספר ההימורים עד לזכייה או לפשיטת רגל היא $n(N-n)$.

ג) נסתכל על מערכת תורים M/M/1 בעלת פרמטרים $\lambda = \mu = 1/2$. נניח שבזמן $t = 0$ המערכת מתחילה עם 5 פריטים במערכת. מה הסיכוי שהמערכת תתרוקן לפחות פעם אחת לפני שתצבור 15 פריטים במערכת בפעם הראשונה? הסבר.

בהצלחה