החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

תשובות למבחן גמר, מועד ג'

8.12.2006

מרצים: פרופ' גדעון וייס, מר. יוני נצרתי.

מתרגלים: מר. דרור קלודה, מר. מרק שוחט.

תשובות לשאלה 1:

א) כל המצבים מתמידים, וכולם במחלקת קשירות אחת.

ב) מתקיים:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=1$$

ג) $E[T_2 \mid X_0 = 2] = 1 + \frac{1}{1/4} + 1 + \frac{1}{1/3} = 9$.

הסבר: צעד 1 לעבור למצב 3, לאחר מכן סדרת ניסויים ב"ת עם משך $Geom(1/4)$ לעבור למצב 4, לאחר מכן צעד 1 לעבור למצב 1, וסדרת ניסויים ב"ת עם משך $Geom(1/3)$ לעבור בחזרה למצב 2.

ד)

$$P(T_1 = 6 \mid X_0 = 1) = 1/3 \cdot 1 \cdot 3/4 \cdot 3/4 \cdot 1/4 \cdot 1 = 3/64$$

ה)

$P(X_2 = 3 \mid T_1 = 5, X_0 = 1) = 1$.

הסבר: כאשר מתחילים במצב 1, ומתקיים שזמן החזרה גדול ממש מ -1 ($T_1 > 1$) אז בהכרח עוברים בצעד הראשון ממצב 1 למצב 2 ולכן בצעד השני ממצב 2 למצב 3.

תשובות לשאלה 2:

א)

$$P(T_1 > t/2 \mid N_t = 1) = 1 - P(T_1 \le t/2 \mid N_t = 1) =$$
$$1 - \frac{P(T_1 \le t/2, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} = 1 - \frac{P(N_{t/2} = 1, N_t - N_{t/2} = 0)}{e^{-\lambda t}\lambda t} =$$
$$1 - \frac{P(N_{t/2} = 1)P(N_{t-s} = 0)}{e^{-\lambda t}\lambda t} = 1 - \frac{e^{-\lambda\frac{t}{2}}\lambda\frac{t}{2}e^{-\lambda(t-t/2)}}{e^{-\lambda t}\lambda t} =$$
$$1 - \frac{1}{2} = 1/2$$

ב)

$$P(N_s = k \mid N_t = n) = \frac{P(N_s = k, N_t = n)}{P(N_t = n)} = \frac{P(N_s = k, N_{t-s} = n-k)}{P(N_t = n)} =$$
$$\frac{e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{s^k(t-s)^{n-k}}{t^n} = \binom{n}{k}\left(s/t\right)^k\left(1 - s/t\right)^{n-k}$$

ג)

$$Cov(N_t, N_s) = Cov(N_t - N_s + N_s, N_s) = Cov(N_t - N_s, N_s) + Cov(N_s, N_s) =$$
$$= 0 + Var(N_s) = \lambda s$$

ד) ראשית נבחין כי - $\{N_t \le n\} \Leftrightarrow \{T_n \ge t\}$

לאחר מכן נרשום ביטויים של ההסברתיות של המאורעות הנ"ל.

$$P(N_t \le n) = \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$
$$P(T_n \ge t) = \int_t^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-\lambda s}ds$$

מכאן נובע השוויון.

תשובות לשאלה 3:
הערה: סעיפים א' + ב' זהים לחלוטין למועד ב'.

א) נסמן את הסתברות לזכות כאשר מתחילים במצב n ב- V_n. אם כך:

$$V_0 = 0$$

$$V_N = 1$$

$$V_n = \frac{1}{2}V_{n-1} + \frac{1}{2}V_{n+1} \qquad n = 1,\ldots,N-1$$

נציב $V_n = \dfrac{n}{N}$ ונראה שהוא מקיים את המשוואות הנ"ל.

ב) נסמן את תוחלת מספר ההימורים עד לזכייה או פשיטת רגל ב H_n. אם כך:

$$H_0 = 0$$

$$H_N = 0$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2}H_{n-1} + \frac{1}{2}H_{n+1} \quad n = 1,\ldots,N-1$$

נציב $H_n = n(N-n)$ ונראה שהוא מקיים את המשוואות הנ"ל.

ג) המצב המתואר הוא כמו מודל המהמר עם סיכויים לרווח והפסד שווים. הסיכוי להגיע למצב 15 לפני הגעה למצב 0 הוא $\dfrac{5}{15}$ (על פי סעיף א'). ולכן הסיכוי להתרוקן (להגיע למצב 0 קודם) הוא $1 - \dfrac{5}{15} = 2/3$.