החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

תשובות למבחן גמר, מועד א'

10.7.2006

מרצים: פרופ' גדעון וייס, מר. יוני נצרתי.

מתרגלים: מר. דרור קלודה, מר. מרק שוחט.

<u>תשובות לשאלה 1:</u>

א) $\{(0,2),(0,1),(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\}$.

לא ייתכן כי במערכת ישנן גם נוסעים וגם מוניות. במידה ויש מוניות במערכת אז הגעת נוסע לא תכניס את הנוסע למערכת. במידה ויש נוסעים במערכת אז הגעת מונית לא תכניס את המונית למערכת.

ב) $(0,2) \underset{\lambda}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} (0,1) \underset{\lambda}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} (0,0) \underset{\lambda}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} (1,0) \underset{\lambda}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} (2,0) \underset{\lambda}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} (3,0)$.

ג) לצורך הנוחות נסמן $(3,0) \equiv 0$, $(2,0) \equiv 1$, ..., $(0,2) \equiv 5$.

משוואות שווי המשקל המפורטות:

$$\pi_0 \lambda = \pi_1 \mu$$
$$\ldots$$
$$\pi_4 \lambda = \pi_5 \mu$$
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$$

אם כך:

$$\pi_k = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 = 2\pi_0 \qquad k = 1,2,3,4,5$$

ולכן

$$\pi_0 \sum_{k=0}^{5} 2^k = 1$$

$$\pi_0 \frac{2^{5+1} - 1}{2 - 1} = 1$$

$$\pi_0 = \frac{1}{63}$$

ולכן ההתפלגות הסטציונרית עבור $\{(0,2),(0,1),(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\}$

היא: $\left(\frac{32}{63} \quad \frac{16}{63} \quad \frac{8}{63} \quad \frac{4}{63} \quad \frac{2}{63} \quad \frac{1}{63} \right)$.

ד) $10\cdot 30\cdot \pi_{(3,0)}\cdot \mu = 10\cdot 30\cdot \frac{1}{63}\cdot\frac{1}{8}\approx 0.6$

ה) $\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2$

<u>תשובות לשאלה 2:</u>

א) $Poisson(20)$.

ב) הגעת פריטים (אנשים או אוטובוסים) לתחנה היא על פי תהליך פואסון עם קצב 21. פריט הוא אוטובוס בהסתברות $\frac{1}{21}$ והוא אדם בהסתברות $\frac{20}{21}$. מספר האנשים אשר אוטובוס אוסף הוא מספר ה"כשלונות" בסדרת הניסויים כאשר הסתברות ההצלחה בכל ניסוי $\frac{1}{21}$ היא.

לכן מספר האנשים הנאספים מתפלג גיאומטרית סופר כישלונות עם פרמטר הצלחה $\frac{1}{21}$.

ג) $\frac{1}{2^{10}}$

<u>תשובות לשאלה 3:</u>

א) $\exp(\mu)$.

ב) $L=\lambda\cdot\frac{1}{\mu}$

ג) משוואות שווי משקל מפורטות:

$$\pi_{k-1}\frac{\lambda}{\mu k}=\pi_k \qquad k=1,2,....$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=1$$

פתרון:

$$\pi_0\frac{\lambda^k}{\mu^k\cdot k!}=\pi_k \qquad k=1,2,....$$

$$\pi_0+\pi_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda/\mu\right)^k}{k!}=1$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}} = e^{-\rho}$$

ולכן סה"כ

$$k = 0,1,2,.... \quad \pi_k = e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!}$$

ד) ניקח גבול $c \to \infty$ ומייד נקבל את התוצאה.