

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

## מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן גמר, מועד א'

10.7.2006

מרצים: פרופ' גדעון וייס, מר. יוני נצרתי.  
מתרגלים: מר. דרור קלודה, מר. מרק שוחט.

### הנחיות

- משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: אסור.
- יש לענות על כל השאלות.
- בכל מקום בו לא מצוין במפורש כי נדרש הסבר יש לענות בקצרה.
- במקומות בהם מצוין כי נדרש הסבר יש לתת הסבר קצר ומנומק.
- אין להחזיר את שאלוני הבחינה.
- כל סעיף הוא 10 נקודות.
- סה"כ 12 סעיפים, 120 נקודות.

### שאלה 1:

להלן מודל של תחנת מוניות:

- בתחנת המוניות יש מקום למוניות ולנוסעים.
- מספר הנוסעים המקסימאלי הוא 3.
- מספר המוניות המקסימאלי הוא 2.
- מוניות מגיעות לתחנה על פי תהליך פואסון עם קצב  $\lambda = 1/4$  מוניות בדקה.
- נוסעים מגיעים לתחנה על פי תהליך פואסון עם קצב  $\mu = 1/8$  נוסעים בדקה.
- נוסע אשר מגיע כאשר ישנה מונית בתחנה, עוזב מייד עם מונית.
- נוסע אשר מגיעה כאשר אין מוניות בתחנה, מצטרף לתור הנוסעים במידה ויש מקום, אחרת הוא מייד עוזב.
- מונית המגיעה כאשר יש נוסעים בתחנה עוזבת מייד עם נוסע יחיד.
- מונית אשר מגיעה כאשר אין נוסעים בתחנה, מצטרפת לתור המוניות במידה ויש מקום, אחרת המונית מייד עוזבת.
- נסמן מצב אשר בו יש  $p$  נוסעים ו-  $c$  מוניות ב  $(p,c)$ .
- לדוגמא כאשר יש בתחנה 2 נוסעים ו 0 מוניות המצב הוא  $(2,0)$ .

(א) מהם המצבים האפשריים של המערכת?

ציין את תשובתך כקבוצת צמדים מהצורה  $(p,c)$ .  
לדוגמא:  $\{(6,3), (4,2), (0,0), (6,1)\}$ .

(ב) תאר את המערכת כתהליך קפיצה מרקובי (תאר את קצבי המעבר בין המצבים).

(ג) מצא את ההסתברויות הסטציונריות של תהליך זה.

(ד) מנהל התחנה מפסיד 10 ש"ח עבור כל נוסע אשר מגיע לתחנה ואינו מקבל שרות (עוזב את התחנה ללא מונית). מהי תוחלת הפסד זה ב 30 דקות? הנח מצב יציב.

(ה) ברגע מסוים שבו היו 2 נוסעים בתחנה, החליט מנהל התחנה לסגור את התחנה כאשר היא תתרוקן מנוסעים. מה ההסתברות שמרגע מסוים זה ועד סגירת התחנה לא הגיע אף נוסע נוסף.

## שאלה 2:

אנשים מגיעים לתחנת אוטובוס על פי תהליך פואסון עם קצב של 20 אנשים בשעה. האנשים בתחנה מחכים לאוטובוס. כאשר אוטובוס מגיע הוא אוסף את כל האנשים.

- (א) נניח כי אוטובוס מגיע כל שעה בדיוק. מהי ההתפלגות של מספר האנשים אשר אוסף כל אוטובוס?
- (ב) נניח כי גם האוטובוסים מגיעים לתחנה על פי תהליך פואסון, עם קצב של 1 בשעה. כעת, מהי ההתפלגות של מספר האנשים אשר אוסף כל אוטובוס? המז: השתמש בתכונות של מיזוג ופיצול של תהליכי פואסון.
- (ג) אוטובוס ראשון הגיעה בשעה 9:10 ולאחר מכן האוטובוס השני הגיעה בשעה 10:30. האוטובוס השני אסף 10 אנשים, מה ההסתברות שכולם חיכו בתחנה פחות מ 40 דקות?

## שאלה 3:

נתון מודל תורים  $M/M/\infty$  עם קצב הגעת צרכנים  $\lambda$  וקצב שרות  $\mu$ . בנוסף נסמן  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ .

- (א) כיצד מתפלג זמן השהייה של צרכן במערכת?
- (ב) השתמש בנוסחת ליטל בכדי למצוא את תוחלת מספר הצרכנים במערכת במצב יציב.
- (ג) הוכח כי במצב יציב, מספר הצרכנים במערכת הוא בעל התפלגות פואסון עם פרמטר  $\rho$ . השתמש במשוואות שווי משקל או משוואות שווי משקל מפורטות.
- (ד) להלן ההתפלגות הסטציונרית של מודל  $M/M/c/c$  (שרתים, יש מקום עבור לא יותר מ  $c$  צרכנים במערכת, וצרכן שמגיע כאשר כל  $c$  השרתים עסוקים אינו נכנס למערכת):

$$\pi_j = \frac{\rho^j / j!}{\sum_{k=0}^c \rho^k / k!} \quad \text{עבור } j = 0, 1, \dots, c$$

השתמש בתוצאה זו בשביל להוכיח שוב את סעיף ג' (פילוג סטציונרי של מספר הצרכנים במערכת  $M/M/\infty$ ).

# בהצלחה

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.