

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

**תשובות לבוחן אמצע: 5.5.2005**

מרצים: פרופ' גדעון וייס, מר. יוני נצרת.  
מתרגלים: מר. דרור קלודה, מר. מרק שוחט.

תשובות לשאלה 1:

- (א)  $\{6, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{3\}$   
 (ב) המחלקה  $\{3\}$  היא מתמידה.  
 המחלקות  $\{6, 4\}, \{1, 2, 5\}$  הינן חולפות.  
 (ג) הטור מתבדר וזאת בגלל שמצב 3 הוא מצב מתמיד והוכח משפט המציין כי הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n$  מתבדר אם  $i$  מצב מתמיד.  
 (ד) לא תיתכן שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים סופי אשר כל מצבייה חולפים. זאת בגלל שאם כל המצבים חולפים אז עבור כל ריאליזציה אפשרית, לכל מצב קיים ערך זמן אשר לאחר זמן זה השרשרת כבר לא מבקרת במצב. אם כך לאחר המקסימום של כל הזמנים הללו השרשרת אינה יכולה להיות באף מצב.  
 כאשר מרחב המצבים הוא אינסופי, ייתכן וכל המצבים חולפים. לדוגמא שרשרת בעלת מרחב מצבים  $\{1, 2, 3, \dots\}$  ובה  $P_{i,i+1} = 1$  היא כזאת.

תשובות לשאלה 2:

- (א)  $X_3 \sim Bin(3, p)$   
 (ב)

$$P^{30} = \begin{pmatrix} b(0;30, p) & b(1;30, p) & b(2;30, p) & b(3;30, p) & \bar{B}(4;30, p) \\ 0 & b(0;30, p) & b(1;30, p) & b(2;30, p) & \bar{B}(3;30, p) \\ 0 & 0 & b(0;30, p) & b(1;30, p) & \bar{B}(2;30, p) \\ 0 & 0 & 0 & b(0;30, p) & \bar{B}(1;30, p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תשובות לשאלה 3:

- (א)  
 עבור  $n=0$

$$\frac{1}{a+b} \left( \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^0 \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{a+b} \left( \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^0$$

נניח כי נכון עבור  $n$ , נוכיח כי נכון עבור  $n+1$ :

$$P^n = \frac{1}{a+b} \left( \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \right)$$

$$P^{n+1} = P \cdot P^n = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{a+b} \left( \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \right)$$

מתקיים כי:

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)b+ab & (1-a)a+a^2 \\ b^2+(1-b)b & ab+a(1-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$$

וגם:

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)a-ab & -(1-a)a+ab \\ ab-(1-b)b & -ab+(1-b)b \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a(1-a-b) & -a(1-a-b) \\ -b(1-a-b) & b(1-a-b) \end{pmatrix} = (1-a-b) \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$P \cdot P^n = \frac{1}{a+b} \left( \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^n (1-a-b) \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \right)$$

ומכאן התוצאה.

(ב) כאשר  $n \rightarrow \infty$

$$P^n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\cdot \frac{b}{a+b} \quad (\text{ג})$$

תשובות לשאלה 4:

$$(א) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sum_{k=1}^{\infty} p_k \\ p_1 & 0 & \sum_{k=2}^{\infty} p_k \\ p_2 & p_1 & \sum_{k=3}^{\infty} p_k \end{pmatrix}$$

$$(ב) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$$

$$(ג) \quad E[loss] = \pi_2(p_3 + 2p_4) + \pi_3 p_4$$

הסבר: ביום אשר בתחילתו יש 2 יחידות במלאי, ישנו סיכוי של  $p_3$  שהביקוש יהיה 3, ואז יחידה אחת הופסדה, וישנו סיכוי של  $p_4$  שהביקוש יהיה 4 ואז 2 יחידות הופסדו. ביום אשר בתחילתו יש שלוש יחידות במלאי, ישנו סיכוי של  $p_4$  שיחידה אחת תופסד. ביום אשר בתחילתו יש 4 יחידות במלאי אין סיכוי שאף יחידה תופסד.  
 $\pi_i$  מציינ את הסיכוי שיום מסוים מתחיל עם  $i$  פריטים ומכאן התוחלת.

$$(ד) \quad E[cost] = 5 \cdot (\pi_2 + \pi_3(p_2 + p_3 + p_4) + \pi_4(p_3 + p_4))$$

הסבר: ביום אשר בתחילתו יש שני פריטים, בטוח תתקיים השלמת מלאי. ביום אשר בתחילתו שלושה פריטים תתקיים השלמת מלאי כל עוד הביקוש גדול מאחד. ביום אשר בתחילתו ארבעה פריטים תתקיים השלמת מלאי רק במידה והביקוש גדול משתיים.  
 $\pi_i$  מציינ את הסיכוי שיום מסוים מתחיל עם  $i$  פריטים ומכאן התוחלת.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.