החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

# מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

# בוחן אמצע: 5.5.2005

מרצים: פרופ' גדעון וייס, מר. יוני נצרתי.

מתרגלים: מר. דרור קלודה, מר. מרק שוחט.

הנחיות

- משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: אסור.
- יש לענות על כל השאלות.
- בכל מקום בו לא מצוין במפורש כי נדרש הסבר יש לענות בקצרה.
- במקומות בהם מצוין כי נדרש הסבר יש לתת הסבר קצר ומנומק.
- כל סעיף הוא 9 נקודות.
- סה"כ 13 סעיפים, 117 נקודות.

שאלה 1:

נתונה שרשרת $\{X_n, n \ge 0\}$ בעלת מרחב מצבים $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ומטריצת מעבר P:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

א) מהן מחלקות הקשירות בשרשרת זו.

ב) איזה מחלקות קשירות הינן מתמידות ואיזה הן חולפות.

ג) נסמן $P_{ij}^{\,n} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$.

האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} P_{33}^{\,n}$ מתבדר או מתכנס? הסבר.

ד) האם תיתכן שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים סופי אשר כל מצביה חולפים? הסבר.
מה לגבי שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים אינסופי? במידה וקיימת תן דוגמא, במידה ולא הסבר.

## שאלה 2:

נתונה שרשרת $\{X_n, n \ge 0\}$ בעלת מרחב מצבים $S = \{0,1,2,3,4\}$ ומטריצת מעבר P:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כמו כן נתון $P(X_0 = 0) = 1$.

א) כיצד מתפלג $X_3$ ?

ב) מהי המטריצה $P^{30}$ ?

הערה בתשובה של שאלה זו ניתן להיעזר בסימונים הבאים:

$$b(k; n, p) \equiv \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\overline{B}(k; n, p) \equiv \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

## שאלה 3:

נתונה שרשרת $\{X_n, n \ge 0\}$ בעלת מרחב מצבים $S = \{0,1\}$ ומטריצת מעבר P:

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

כאשר $0 < a, b < 1$.

א) הוכח באינדוקציה:

$$P^n = \frac{1}{a+b}\left( \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \right)$$

ב) כיצד נראית $P^n$ כאשר $n \to \infty$ (הסתמך על הסעיף הקודם)?

ג) עבור פרק זמן ארוך, מהו חלק הזמן בו התהליך במצב 0?

שאלה 4:

תהי $\{X_n, n \ge 0\}$ שרשרת מרקוב המציינת את כמות המלאי של מוצר מסוים בחנות בתחילת כל יום עבודה. זאת אומרת שערך התהליך $X_n$ מציין את כמות הפריטים מאותו מוצר הנמצאים בתחילת יום העבודה ה n.

מדיניות המלאי של החנות הינה כדלקמן: בסוף כל יום עבודה נבדקת כמות המלאי. במידה וכמות המלאי קטנה ממש מ- 2 פריטים אז מושלם מלאי כך שכמות המלאי תהיה 4 פריטים. הערה: השלמת המלאי היא מיידית. במידה וכמות המלאי גדולה או שווה ל- 2 פריטים לא מושלם מלאי.

נניח כי עבור היום ה n הביקוש לפריטים מהחנות נתון ע"י המשתנה המקרי החיובי $D_n$. בנוסף נניח כי הסדרה $\{D_n, n > 0\}$ הינה i.i.d ו $P(D_n = k) = p_k$.

במידה ועבור n כלשהו $X_n < D_n$ (הביקוש במהלך היום גובר על כמות המלאי) אז כל הפריטים נרכשים ובסוף היום המלאי מתמלא לרמה של 4. ייתרת הביקוש אינה מסופקת.

אם כך מרחב מצבים המתאים לשרשרת זו הוא $S = \{2, 3, 4\}$.

א) נניח כי פילוג הביקוש הוא כללי: נתון ע"י הסדרה $\{p_1, p_2, ...\}$ השלם את מטריצת המעבר.

$$P = \begin{pmatrix} ? & 0 & \sum_{k=1}^{\infty} p_k \\ p_1 & ? & ? \\ ? & ? & \sum_{k=3}^{\infty} p_k \end{pmatrix}$$

ב) נניח כי $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0.25$. רשום את מטריצת המעבר.

ג) הנח כי בכל פעם אשר לא ניתן לספק את הביקוש למוצר, החנות סופגת הפסד של שקל אחד.
לדוגמא, ביום ובו מספר הפריטים במלאי בתחילת היום הוא 2 והביקוש למוצר הוא 4, החנות סופגת הפסד של 2 שקלים.
נניח כי התהליך רץ לפרק זמן ארוך, ומתקיים $P(X_n = i) \approx \pi_i$ לכל n ($\pi_2, \pi_3, \pi_4$ ידועים).
מהי בקירוב תוחלת ההפסד היומית. הסבר.

ד) הנח כי עלות קבועה לחידוש המלאי היא 5 שקלים. ז"א שבכל יום ובו יש צורך לחדש את המלאי, החנות סופגת עלות של 5 שקלים.
נניח כי התהליך רץ לפרק זמן ארוך, ומתקיים $P(X_n = i) \approx \pi_i$ לכל n ($\pi_2, \pi_3, \pi_4$ ידועים).
מהי בקירוב תוחלת ההוצאה הקבועה על חידוש המלאי בכל יום. הסבר.