פרק ב-6

מבוא להשוואות מרובות.

נעזר בחומר משקפים של ד"ר נויה גלאי

ביצענו ניתוח שונות (חד-כווני) מה עכשיו?

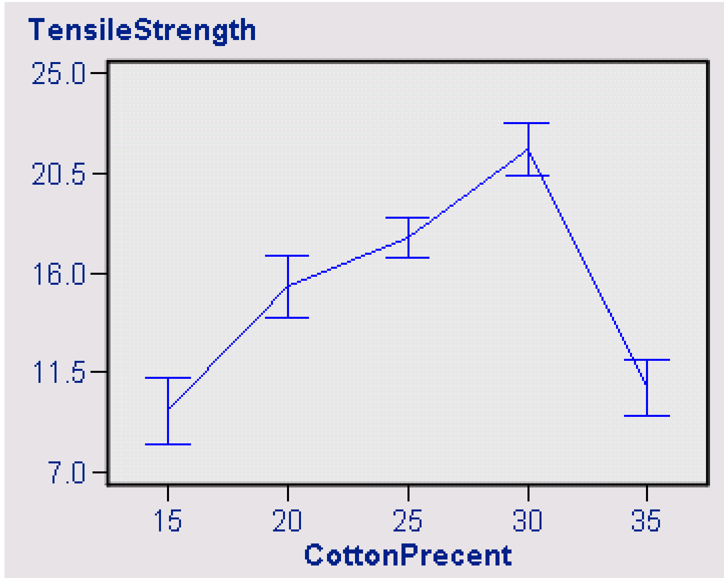
- לא דחינו את H0 <= יללה.. למחקר הבא.
- דחינו את H0 <= שאלות נוספות? נרצה:
  - להסיק לגבי הפרש תוחלות של זוגות של טיפולים:
    - כל הזוגות האפשריים.
    - זוגות אשר עניינו אותנו מראש (לפני תחילת הניתוח).
    - זוגות אשר נראים מעניינים על פי הפרש ממוצעי המדגם.
    - כאשר אחד הטיפולים הוא טיפול "בקרה" נרצה להשוות את כל הטיפולים לטיפול הבקרה (a-1 זוגות).
  - לבדוק השארות נוספות המערבות יותר משני טיפולים. (קונטרסטים).

דוגמאות
להשוואות
מרובות

דוגמת השפעת אחוז הכותנה על חוזק הסיב

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	4	475.7600000	118.9400000	14.76	<.0001
Error	20	161.2000000	8.0600000		
Corrected Total	24	636.9600000			

CottonPrecent	Mean of TensileStrength	Std. Error of TensileStrength
.	15.04	1.03034
15	9.80	1.49666
20	15.40	1.40000
25	17.60	0.92736
30	21.60	1.16619
35	10.80	1.28062



השוואה בין כל הזוגות האפשריים:

- במקרה שלנו a=5 אז בעיקרון דרושים $\binom{5}{2}=10$ השוואות.
- בעצם אנו מעוניינים בדירוג של כל חמשת הטיפולים.
- בדירוג על פי הממוצעים מקבלים:
- האם זה מובהק?
- תשובה אפשרית: ברמת סמך 5%:

טיפול	ממוצע
15	9.8
35	10.8
20	15.4
25	17.6
30	21.6

זהים

קיים שוני

זהים

קיים שוני

נלמד שיטות לביצוע ניתוח כזה

השוואת כל הטיפולים לטיפול בקרה

- מקרה נפוץ בניסויים הוא a-1 טיפולים "אמיתיים" וטיפול בקרה אחד.
- לדוגמא: רוצים לבדוק את ההשפעה על לחץ הדם של 4 סוגי תרופות. בודקים 5*20 נבדקים (5 טיפולים) כאשר אחד הטיפולים (נניח מס' 1) הוא טיפול הבקרה אשר אינו מקבל אף תרופה (בפועל יקבל פלסיבו).
- השוואות מתבקשות הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_0: \mu_1 = \mu_3$$
$$H_0: \mu_1 = \mu_4$$
$$H_0: \mu_1 = \mu_5$$

השוואות המערבות יותר משני טיפולים

- לפעמים ייתכן ונרצה לבצע השוואה יותר מורכבת.
- דוגמא: נניח ובוחנים את השפעה של דשנים על כמות היבול הגודלת במהלך חודש (נמדד בק"ג). להלן הטיפולים.
  - טיפול 1 - n0P0 – בקרה, ללא דשן
  - טיפול 2 - n0P1 – ללא חנקן (nitrogen) אבל עם זרחן (phospohrous).
  - טיפול 3 - n1P0 – חנקן ללא זרחן.
  - טיפול 4 - n1P1 – גם חנקן וגם זרחן.

הערה: ייתכן והיה ניתן להסתכל על ניסוי זה כניתוח שונות דו-כווני, אבל לא בהכרח.

- מבנה הטיפולים גורר את ההשערות המעניינות הנ"ל:

$$H_0: \mu_1 + \mu_3 = \mu_2 + \mu_4$$
ההשערה טוענת שאין השפעה לזרחן.

$$H_0: \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$$
ההשערה טוענת שאין השפעה לחנקן.

עקרונות
כלליים עבור
השוואות
מרובות

השוואה מתוכננת מראש (confirmatory analysis) והשוואה מבוססת על הממצעים (exploratory analysis) – post-hoc.

- מבחינה סטטיסטית חשוב להבחין בין השוואות אותן הגדרנו מראש, לפי השערה מדעית מסוימת, לבין השוואות לא מתוכננות אשר נובעות מהממצאים על פי הנתונים אותם אספנו.
- כאשר נבחר השוואות לפי הנתונים, למשל, נשווה תוחלת מכסימלית למינימלית – נקבל הטיה במבחן, כלומר, מובהקות לא נכונה. עם בחירה כזו המובהקות האמיתית נמוכה יותר מזו שנקבעה. השוואות לא מתוכננות מראש נקראות גם השוואות post-hoc (כלומר, השוואות "לאחר מעשה", אחרי שהנתונים כבר קיימים).

רמת מובהקות הניסוי מול רמת מובהקות ההשוואה.

- כאשר אנו מבצעים השוואות מרובות אז יש שתי רמות מובהקות:
  - רמת המובהקות של כל הניסוי (experiment):

$$\alpha_e = \text{P(Reject Some H0| All H0 are True)}$$

$$1-\alpha_e = \text{P(Do not reject any H0| All H0 are True)}$$

  - רמת המובהקות של השוואה בודדת (comparison):

$$\alpha_c = \text{P(Reject a specific H0 | The Specific H0 is true)}$$

$$1-\alpha_c = \text{P(Do not reject a specific H0 | The Specific H0 is true)}$$

נוסחאות Dunn-Sidak.

תחת ההנחה שההשוואות הינם בלתי תלויות:

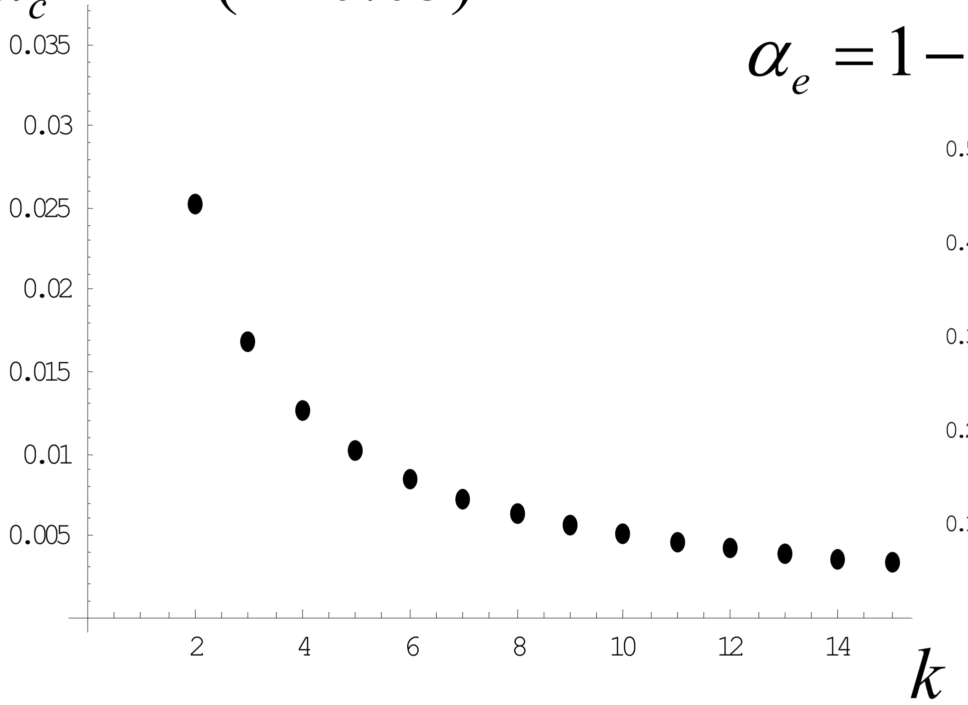
$$\alpha_e = 1-(1-\alpha_c)^k$$

$$\downarrow$$

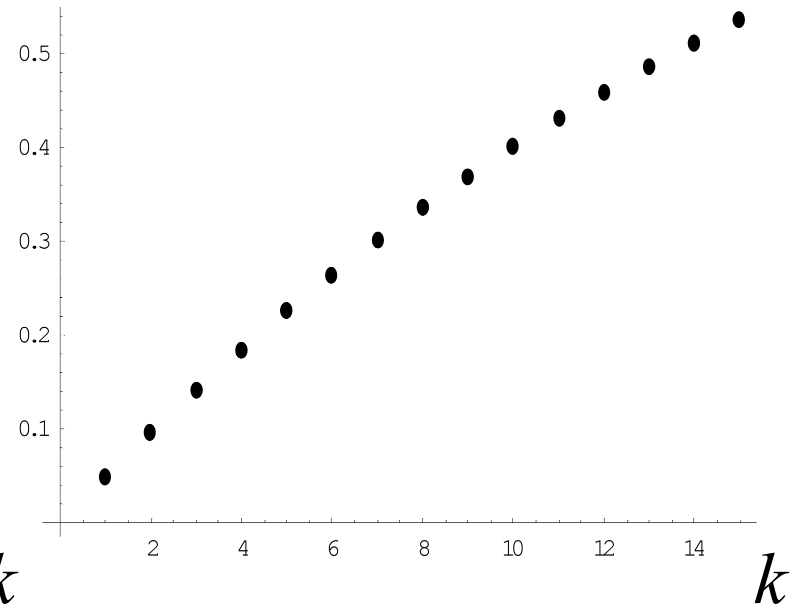
$$\alpha_c = 1-(1-\alpha_e)^{1/k}$$

k הוא מספר ההשוואות.

$$\alpha_c = 1-(1-0.05)^{1/k}$$



$$\alpha_e = 1-(1-0.05)^k$$



קרוב Bonferroni

$$\alpha_e = 1-(1-\alpha_c)^k \approx k\alpha_c$$

$$\alpha_c = 1-(1-\alpha_e)^{1/k} \approx \frac{\alpha_e}{k}$$

דוגמא: נניח ויש לנו 7 השוואות בלתי תלויות. ואנו רוצים רמת מובהקות של הניסוי להיות 0.05:

$$\alpha_c = 1-(1-0.05)^{\frac{1}{7}} = 0.0073 \approx 0.0071 = \frac{0.05}{7}$$

מה לגבי כאשר ההשוואות תלויות

ובמידה ובלתי תלויים:

$$\alpha_e = 1-(1-\alpha_c)^k$$

במידה והתלות מלאה:

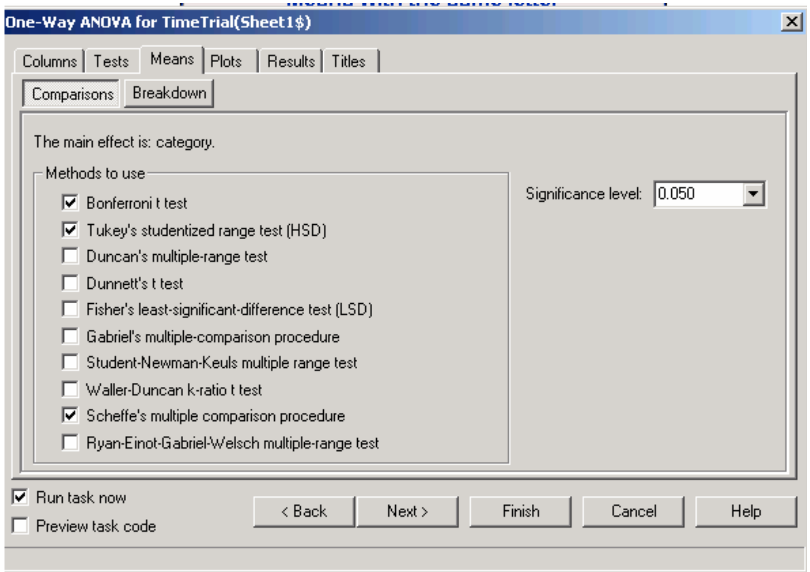
$$\alpha_c = a_e$$

לרוב:

$$\alpha_c \le \alpha_e \le 1-(1-\alpha_c)^k$$

סדר הלימוד...

- ...השערות אשר מערבות יותר משני טיפולים הם יחסית נדירות בפרקטיקה אבל "ברורות בתיאוריה". ניתן ליישמם באמצעות קונטרסטים – נלמד בשקפים הקרובים.
- שילוב קונטרסים בניתוח שונות הוא המשך טבעי לתיאוריה של פירוק סכום הריבועים ודרגות החופש אשר נלמדה בשיעורים הקודמים.
- שיטות נוספות (לביצוע השוואות מרובות) ילמדו לאחר מכן (בפרק הבא)...



קונטרסטים
וקונטרסטים אורתוגונליים

קונטרסטים (Contrasts)

- מודל ניתוח שונות עם a טיפולים.
- נגדיר וקטור של משקלות: $(c_1,\dots,c_a)$ כך ש $\sum_{i=1}^{a} c_i = 0$

מקדמי קונטרסט

- נרצה להסיק לגבי $\sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i$ (קונטרסט) :
  - לאמוד את $\sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i$ ולקבוע עבורו רווח סמך.
  - לבצע את מבחן ההשערה:

$$H_0: \sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i = 0 \qquad H_1: \ otherwise$$

נשאף גם לבצע מספר מבחני השערה במקביל:

$$H_0: \sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i = 0 \qquad H_1: \ otherwise$$

$$H_0: \sum_{i=1}^{a} d_i\mu_i = 0 \qquad H_1: \ otherwise$$

$$H_0: \sum_{i=1}^{a} e_i\mu_i = 0 \qquad H_1: \ otherwise$$

$\ddots$

בדוגמא זו, c,d,e הם וקטורים שונים של **מקדמי קונטרסטים**...

דוגמאות לקונטרסטים:

(a=5)

מקדמים	קונטרסט	השערות
$(0,1,0,0,-1)$	$\sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i = \mu_2 - \mu_5$	$H_0: \ \mu_2 = \mu_5$ $H_1: \ otherwise$
$(1,0,1,-1,-1)$	$\sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i = \mu_1 + \mu_3 - \mu_4 - \mu_5$	$H_0: \ \mu_1 + \mu_3 = \mu_4 + \mu_5$ $H_1: \ otherwise$
$(-1,4,-1,-1,-1)$	$\sum_{i=1}^{a} c_i\mu_i = -\mu_1 + 4\mu_2 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5$	$H_0: \ 4\mu_2 = \mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$ $H_1: \ otherwise$

אמדים נקודתיים לקונטרסטים

- כיצד נאמוד את $\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$?
- כמובן שנשתמש ב - $\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet}$

זהו אמד חסר הטיה:
$$E\left[\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet}\right] = \sum_{i=1}^{a} c_i E\bar{y}_{i\bullet} = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$$

שונות האמד:
$$Var\left[\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet}\right] = \sum_{i=1}^{a} c_i^2 Var(\bar{y}_{i\bullet}) = \sum_{i=1}^{a} c_i^2 \frac{\sigma^2}{n_i} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}$$

פילוג האמד:
$$\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet} \sim N\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i,\ \sigma^2 \sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}\right)$$

אבל השונות אינה ידועה, להלן SE של האמד:
$$SE\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet}\right) = \sqrt{MS_E \sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}}$$

Standard Error

רווח סמך לקונטרסט

קל לראות:

$$\frac{\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet} - \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i}{\sqrt{MS_E \sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}}} \sim t_{N-a}$$

ולכן רווח סמך עבור $\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i$ הוא:

$$\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, N-a} \sqrt{MS_E \sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}}$$

מבחן השערה לגבי קונטרסט (בודד)

$$H_0 : \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i = 0$$

$$H_1 : \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i \neq 0$$

דחה H0 אם:

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet}\right|}{\sqrt{MS_E \sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}}} > t_{1-\frac{\alpha}{2},N-a}$$

נעלה

בריבוע

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet}\right)^2}{MS_E \sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}} > \left(t_{1-\frac{\alpha}{2},N-a}\right)^2$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet}\right)^2 / \sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}}{MS_E} > F_{1-\alpha,1,N-a}$$

מכאן נגדיר את סכום הריבועים
לקונטרסט (עם דרגת חופש אחת):

$$SS\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i\right) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\bullet}\right)^2}{\sum_{i=1}^{a} \frac{c_i^2}{n_i}}$$

פרוק סכום הריבועים ממשיך...

- ניקח מקדמי קונטרסטים $C=(c_1,\ldots,c_a)$ ו – $D=(d_1,\ldots,d_a)$
- הקונטרסטים הם **אורתוגונליים** כאשר $\sum_{i=1}^{a} c_i d_i = 0$
- במקרה הלא – מאוזן צריך להתקיים $\sum_{i=1}^{a} n_i c_i d_i = 0$
- ו SSTreatments מתפרק:

$$SS_{Total} = SS_{Treatments} + SS_E$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2 \qquad n\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet})^2 \qquad \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i\bullet})^2$$

$$N-1=a\cdot n-1 \;=\; a-1 \;+\; a\cdot(n-1)=an-a$$

סכום של סכומי הריבועים של a-1 קונטרסטים אורטוגונלים (כל אחד עם דרגת חופש אחת).

אורתוגונליים => בלתי תלויים.

- תוצאה (ללא הוכחה): כאשר נבצע מבחני השערה (או רווחי סמך) לגבי קונטרסטים אורתוגונאליים, תוצאות המבחן (ערכי רווח הסמך) יהיו בלתי תלויים.
- לא כך עבור קונטרסטים אשר אינם אורתוגונאליים.

דוגמא:

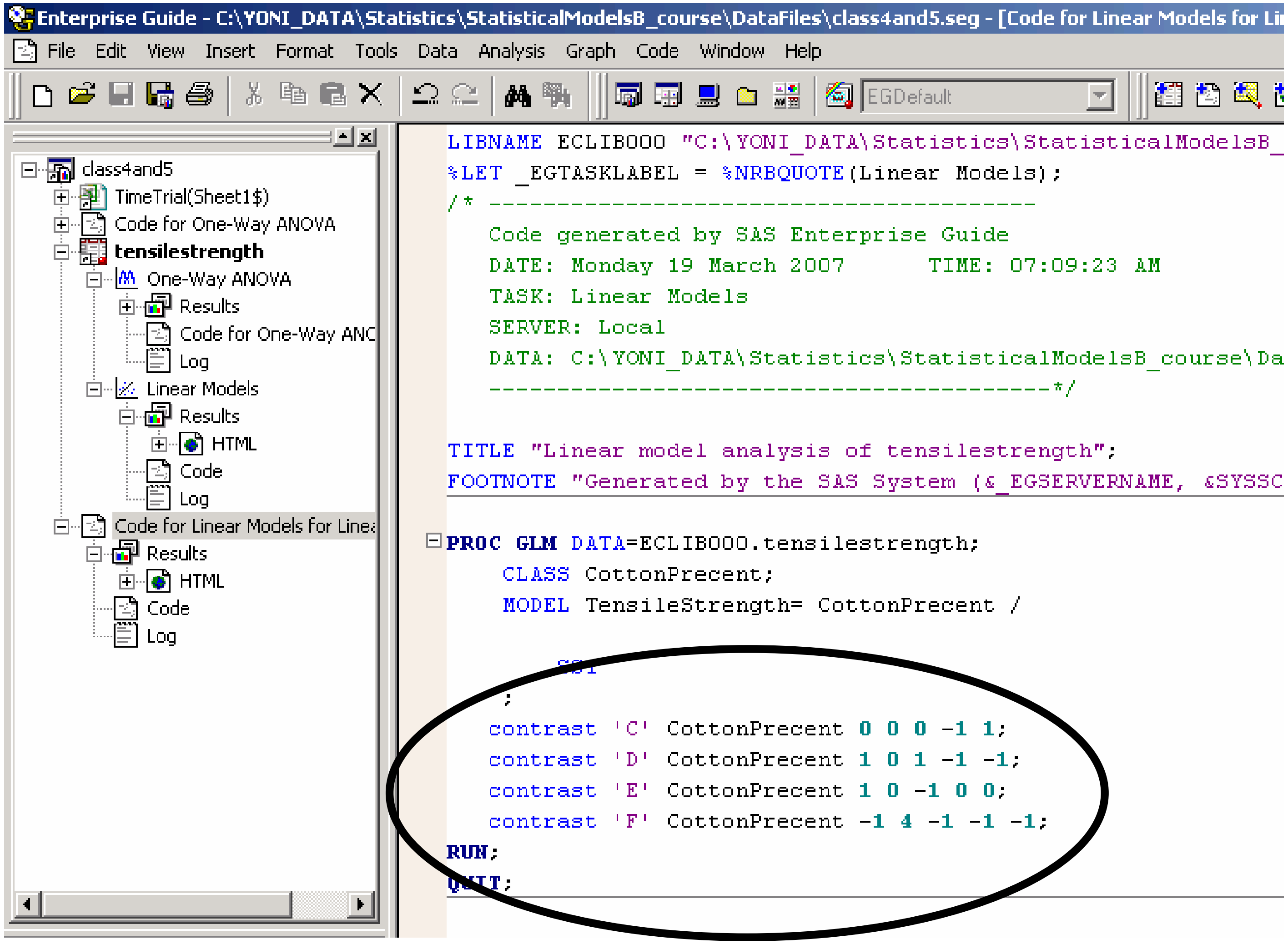
- עבור דוגמת TensileStrength ניקח 4 קונטרסטים אורתוגונליים:

C	D	E	F
$c_1 = 0$	$d_1 = 1$	$e_1 = 1$	$f_1 = -1$
$c_2 = 0$	$d_2 = 0$	$e_2 = 0$	$f_2 = 4$
$c_3 = 0$	$d_3 = 1$	$e_3 = -1$	$f_3 = -1$
$c_4 = -1$	$d_4 = -1$	$e_4 = 0$	$f_4 = -1$
$c_5 = 1$	$d_5 = -1$	$e_5 = 0$	$f_5 = -1$

בדוק שהם אורתוגונאליים...

מהן ההשערות אשר מתאימים לקונטרסטים אלו?

הזנה ל PROC GLM:



תוצאות:

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	4	475.7600000	118.9400000	14.76	<.0001
Error	20	161.2000000	8.0600000		
Corrected Total	24	636.9600000			

R-Square	Coeff Var	Root MSE	TensileStrength Mean
0.746923	18.87642	2.839014	15.04000

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
CottonPrecent	4	475.7600000	118.9400000	14.76	<.0001

Contrast	DF	Contrast SS	Mean Square	F Value	Pr > F
C	1	291.6000000	291.6000000	36.18	<.0001
D	1	31.2500000	31.2500000	3.88	0.0630
E	1	152.1000000	152.1000000	18.87	0.0003
F	1	0.8100000	0.8100000	0.10	0.7545

נסיק מסקנות

באיזה רמת מובהקות נשמש?

הערות:

- אם לא דוחים את H0 של ניתוח שונות אז לא דוחים את H0 עבור אף קונטרסט (כאשר משתמשים באותה רמת מובהקות למבחן הקונטרסט הבודד ולניתוח שונות).
- קונטרסטים אורתוגונליים לפעמים מאפשרים לנו להבין מהם הגורמים אשר "הגדילו" את SSTreatments וגרמו לנו לדחות את H0 של ניתוח שונות.
- תוצאה (ללא הוכחה): תמיד קיים קונטרסט אורתוגונאלי אשר מסביר את **כל** SSTreatments, אבל לפעמים קשה למצוא אותו וההשערה הנובעת ממנו היא לרוב ללא משמעות.

שיטת הקונטרסטים האורתוגונלים אינה מספיקה לנו...

- לפעמים קשה (או לא ניתן) למצוא קונטרסטים אורתוגונאליים אשר יתאימו למערכת ההשערות המעניינת אותנו.
- בעיקרון אפשר לבצע את הניתוח גם על סט של קוטנרסטים שאינם אורתוגונאליים, אבל אז קיימת תלות בין המבחנים.
- שיטת הקונטרסטים אשר הוצגה כאן אינה שיטת Post-Hoc ואינה מאפשרת לבצע Data-Snooping!!! מדוע?
- למרות היופי המתמטי של קונטרסטים, הרבה פעמים נהייה מעוניינים בהשוואה של צמדים בלבד וע"י קונטרסטים אורתוגונאליים לא ניתן לכסות את כל הצמדים:

$$a-1<\binom{a}{2}=\frac{a(a-1)}{2}$$

ולכן נעבור לפרק הבא...