פרק ג-3

ביצוע ניתוח שונות דו-כווני.

מודל ניתוח שונות דו-כווני

(גורמים A ו- B)

נתונים

$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$\cdots$	$\cdots$	$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bn}$
$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21n}$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1n}$	$\cdots$	$\cdots$	$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abn}$

מודל

$$y_{ikj} = \underbrace{\mu + \tau_i + \beta_k + (\tau\beta)_{ik}}_{\mu_{ik}} + \tilde{\varepsilon}_{ikj}$$

$$i = 1, \ldots, a$$

$$k = 1, \ldots, b$$

$$j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0 \;,\; \sum_{k=1}^{b} \beta_k = 0$$

$$\sum_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ik} = 0 \;,\; \sum_{k=1}^{b} (\tau\beta)_{ik} = 0$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ikj} \sim NID(0, \sigma^2)$$

המצב המאוזן

השערות

"אין השפעה לגורם הראשון"

$$H_0 : \tau_1 = \ldots = \tau_a = 0$$
$$H_1 : otherwise$$

"אין השפעה לגורם השני"

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_b = 0$$
$$H_1 : otherwise$$

"אין אינטראקציה בין הגורם הראשון לשני"

$$H_0 : (\tau\beta)_{ik} = 0 \quad \forall i, k$$
$$H_1 : otherwise$$

פרוק סכום ריבועים

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{j=1}^{n}(y_{ikj}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}_{SS_{Total}} = \underbrace{bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}_{SS_A} + \underbrace{an\sum_{k=1}^{b}(\bar{y}_{\bullet k\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}_{SS_B} + \underbrace{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\bar{y}_{ik\bullet}-\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet k\bullet}+\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}_{SS_{AB}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(\sum_{j=1}^{n}(y_{ikj}-\bar{y}_{ik\bullet})^2\right)}_{SS_E}$$

ה"פיזור"
הכללי

ה"פיזור" של הממוצעים
של כל טיפול מגורם A

ה"פיזור" של הממוצעים
של כל טיפול מגורם B

ה"פיזור" שנובע מאינטראקציה
(מסובר בשקף הבא)

סכום ה"פיזורים"
בתוך כל תא.

$$\underbrace{\overbrace{bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}^{SS_A} + \overbrace{an\sum_{k=1}^{b}(\bar{y}_{\bullet k\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}^{SS_B} + \overbrace{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\bar{y}_{ik\bullet}-\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet k\bullet}+\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}^{SS_{AB}}}_{SS_{Model}=n\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\bar{y}_{ik\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}$$

סכום ריבועי אינטראקציה...?

נבין את המשמעות של סכום הריבועים,
נראה מה קורה כאשר הסכום 0.

$$SS_{AB} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\underbrace{(\bar{y}_{ik\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet k\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})}_{<i,k>}{}^2$$

סתם סימון

ניקח טיפולים: $i,\quad i'$

$k,\quad k'$

אז... $SS_{AB} = 0$ $\Leftarrow$

$$<i,k> = 0$$
$$<i,k'> = 0$$
$$<i',k> = 0$$
$$<i',k'> = 0$$
$$\Downarrow$$
$$<i,k> - <i',k> = <i,k'> - <i',k'>$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\bar{y}_{ik\bullet} - \bar{y}_{i'k\bullet} = \bar{y}_{ik'\bullet} - \bar{y}_{i'k'\bullet}}$$

המשמעות היא שהשינוי בגורם הראשון
(i ל 'i) אינו מושפע מערכו של הגורם
השני (k או 'k).

דרגות חופש

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{j=1}^{n}(y_{ikj}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}_{SS_{Total}} = \underbrace{bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}_{SS_A} + \underbrace{an\sum_{k=1}^{b}(\bar{y}_{\bullet k\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}_{SS_B} + \underbrace{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\bar{y}_{ik\bullet}-\bar{y}_{i\bullet\bullet}-\bar{y}_{\bullet k\bullet}+\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}_{SS_{AB}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(\sum_{j=1}^{n}(y_{ikj}-\bar{y}_{ik\bullet})^2\right)}_{SS_E}$$

$\boxed{abn-1}$ $\boxed{a-1}$ $\boxed{b-1}$ $\boxed{(a-1)(b-1)}$ $\boxed{ab(n-1)}$

$$\underbrace{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\bar{y}_{ik\bullet}-\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2}_{SS_{Model}} \quad \boxed{ab-1}$$

__פרוק דרגות החופש:__

$$\underbrace{(abn-1)}_{SS_{Total}} = \underbrace{(ab-1)}_{SS_{Model}} + \underbrace{(ab(n-1))}_{SS_E}$$

$$\underbrace{(ab-1)}_{SS_{Model}} = \underbrace{(a-1)}_{SS_A} + \underbrace{(b-1)}_{SS_B} + \underbrace{((a-1)(b-1))}_{SS_{AB}}$$

4 אמדים שונים ל-σ^2

$$E[MS_A] = E[\frac{SS_A}{a-1}] = \sigma^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$$

חסר הטיה כאשר אין השפעה לגורם הראשון

$$E[MS_B] = E[\frac{SS_B}{b-1}] = \sigma^2 + \frac{an\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2}{b-1}$$

חסר הטיה כאשר אין השפעה לגורם השני

$$E[MS_{AB}] = E[\frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}] = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\tau\beta)_{ik}^2}{(a-1)(b-1)}$$

חסר הטיה כאשר אין אינטראקציה

$$E[MS_E] = E[\frac{SS_E}{ab(n-1)}] = \sigma^2$$

תמיד חסר הטיה

דוגמא לחישוב תוחלת של אמד...

נראה:

$$E[MS_{AB}] = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\tau\beta)_{ik}^{\ 2}}{(a-1)(b-1)}$$

3 סטטיסטי F, אחד עבור כל מערכת השערות

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_E} = \frac{SS_A / (a-1)}{SS_E / ab(n-1)} \sim F_{a-1,\ ab(n-1)}$$

"אין השפעה לגורם הראשון"

$H_0 : \tau_1 = \ldots = \tau_a = 0$

$H_1 : otherwise$

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_E} = \frac{SS_B / (b-1)}{SS_E / ab(n-1)} \sim F_{b-1,\ ab(n-1)}$$

"אין השפעה לגורם השני"

$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_b = 0$

$H_1 : otherwise$

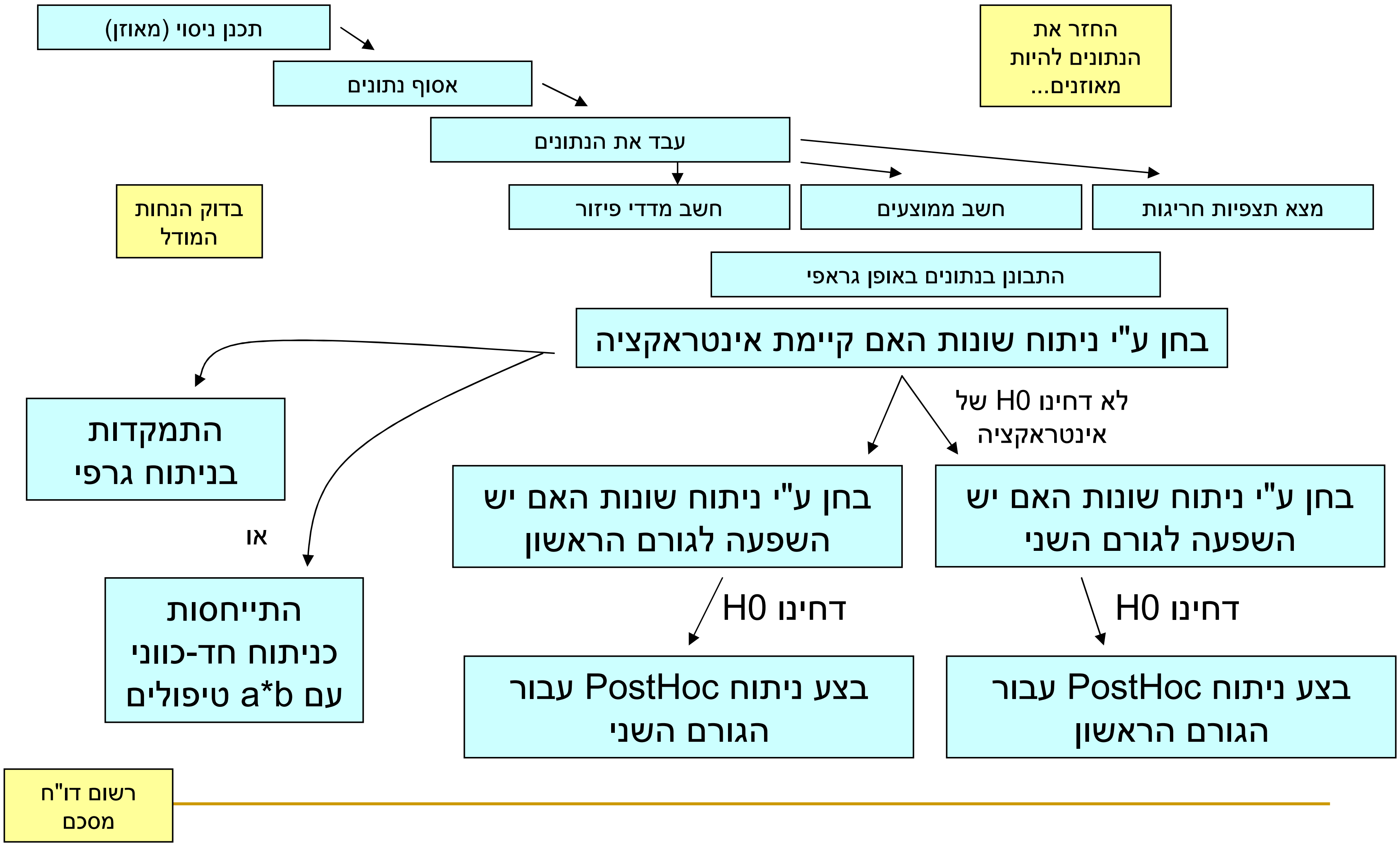
$$F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_E} = \frac{SS_{AB} / (a-1)(b-1)}{SS_E / ab(n-1)} \sim F_{(a-1)(b-1),\ ab(n-1)}$$

"אין אינטראקציה בין הגורם הראשון לשני"

$H_0 : (\tau\beta)_{ik} = 0 \quad \forall i,k$

$H_1 : otherwise$

שלבי הביצוע... (הסבר ציורי – פשוט יותר מהמציאות)



ביצוע ב SAS

- דוגמת השיווק
- ANOVA ->Linear Models
- ניתוח הפלט...

	DisplayHeight	DisplayWidth	Revenue
1	B	R	58.2
2	B	R	53.7
3	B	R	55.8
4	B	W	55.7
5	B	W	52.5
6	B	W	58.9
7	M	R	73
8	M	R	78.1
9	M	R	75.4
10	M	W	76.2
11	M	W	78.4
12	M	W	82.1
13	T	R	52.4
14	T	R	49.7
15	T	R	50.9
16	T	W	54
17	T	W	52.1
18	T	W	49.9