אפקטים אקראיים ומעורבים בניתוח שונות דו-כווני.

נעזר בחומר של ד"ר ניצה ברקן

מה עכשיו...

- נעבור למקרה רב-גורמי כאשר כל או חלק מהגורמים (אפקטים) הינם אקראיים.
- דוגמא:
  - במפעל לייצור חלקי מטוסים משתמשים במערכת מדידה מסוימת לצורך מדידה של מימדים של חלקים. המערכת מערבת התערבות של מפעיל.
  - מערכת מדידה מסוג זה מצריכה דיוק רב ולכן חשוב לשמור על שונות מדידה נמוכה.
  - מעוניינים בניתוח של גורמי השונות:
    - המפעיל הוא גורם אקראי (יש מאות).
    - החלקים הם גורם אקראי (יש אלפים).

הנתונים

דגמנו c=3 מפעילים

דגמנו d=20 חלקים
("מתוכננים" להיות באותו אורך).

מפעילים מדדו
את אורך
החלקים

calModelsB_course\DataFiles\ClassFinalANOVA.seg - [partMeas

s Graph Code Window Help

	part	operator	length
1	1	haim	21
2	1	haim	20
3	1	itzik	20
4	1	itzik	20
5	1	yosi	19
6	1	yosi	21
7	2	haim	24
8	2	haim	23
9	2	itzik	24
10	2	itzik	24
11	2	yosi	23
12	2	yosi	24
13	3	haim	20
14	3	haim	21
15	3	itzik	19
16	3	itzik	21
17	3	yosi	20
18	3	yosi	22
19	4	haim	27

כל מפעיל
מדד אורך
של כל חלק
פעמיים
(n=2)

מודל דו-כווני כאשר שני הגורמים אקראיים

$$y_{ikj} = \underbrace{\mu + \tilde{\tau}_i + \tilde{\beta}_k + \widetilde{(\tau\beta)}_{ik}}_{\mu_{ik}} + \tilde{\varepsilon}_{ikj}$$

$$i = 1,\dots,c$$

$$k = 1,\dots,d$$

$$j = 1,\dots,n$$

השונות שנובעת מחלקים

$$Var(\tilde{\tau}_i) = \sigma_\tau^{\ 2}$$

השונות שנובעת ממפעילים

$$Var(\tilde{\beta}_k) = \sigma_\beta^{\ 2}$$

השונות שנובעת מאינטראקציה בין חלקים למפעילים

$$Var(\widetilde{(\tau\beta)}_{ik}) = \sigma_{\tau\beta}^{\ 2}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ikj} \sim NID(0, \sigma^2)$$

$$H_0 : \sigma_\tau^{\ 2} = 0$$
$$H_1 : \sigma_\tau^{\ 2} > 0$$

$$H_0 : \sigma_\beta^{\ 2} = 0$$
$$H_1 : \sigma_\beta^{\ 2} > 0$$

$$H_0 : \sigma_{\tau\beta}^{\ 2} = 0$$
$$H_1 : \sigma_{t\beta}^{\ 2} > 0$$

$$Var(y_{ikj}) = \sigma_\tau^{\ 2} + \sigma_\beta^{\ 2} + \sigma_{\tau\beta}^{\ 2} + \sigma^2$$

תוחלות של ממוצעי ריבועים...

$$E[MS_A] = \ldots = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^{\;2} + dn\sigma_{\tau}^{\;2}$$

$$E[MS_B] = \ldots = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^{\;2} + cn\sigma_{\beta}^{\;2}$$

$$E[MS_{AB}] = \ldots = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^{\;2}$$

$$E[MS_E] = \ldots = \sigma^2$$

מתוחלות של ממוצעי ריבועים למבחני F:

$$E[MS_A] = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + dn\sigma_{\tau}^2$$

$$E[MS_B] = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + cn\sigma_{\beta}^2$$

$$E[MS_{AB}] = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2$$

$$E[MS_E] = \sigma^2$$

סטטיסטי F:	השערה נבדקת:
$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \overset{H_0}{\sim} F_{(c-1)(d-1),cd(n-1)}$	$H_0: \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$ $H_1: \sigma_{t\beta}^2 > 0$
$F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}} \overset{H_0}{\sim} F_{c-1,(c-1)(d-1)}$	$H_0: \sigma_{\tau}^2 = 0$ $H_1: \sigma_{\tau}^2 > 0$
$F_0 = \frac{MS_B}{MS_{AB}} \overset{H_0}{\sim} F_{d-1,(c-1)(d-1)}$	$H_0: \sigma_{\beta}^2 = 0$ $H_1: \sigma_{\beta}^2 > 0$

ביצוע ב SAS

- באופן כללי ניתן לבצע ניתוח של מודלים מסוג זה באמצעות PROC MIXED (לא נלמד בקורס זה).
- כאן נלמד כיצד ניתן לבצע שינוי לאופן פעולת PROC GLM ע"י הוספת פקודת 'Random'.
- יש להוסיף לקוד את הפקודה:

```
random operator part operator*part/test;
```

ניתוח שונות דו-כווני ללא Random

ללא random

תוספת לפלט עקב פקודת random

Source	Type III Expected Mean Square
operator	Var(Error) + 2 Var(operator*part) + 40 Var(operator)
part	Var(Error) + 2 Var(operator*part) + 6 Var(part)
operator*part	Var(Error) + 2 Var(operator*part)

Linear model analysis of partMeasure(Sheet1$)

The GLM Procedure

Tests of Hypotheses for Random Model Analysis of Variance

: length length

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
operator	2	2.400000	1.200000	1.63	0.2089
part	19	1188.466667	62.550877	85.09	<.0001
Error	38	27.933333	0.735088		
Error: MS(operator*part)					

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
operator*part	38	27.933333	0.735088	0.76	0.8150
Error: MS(Error)	60	58.000000	0.966667		

אמידה של מרכיבי השונות "שיטת ניתוח שונות לאמידה"

$$MS_A = \hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2 + dn\hat{\sigma}_{\tau}^2$$

$$MS_B = \hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2 + cn\hat{\sigma}_{\beta}^2$$

$$MS_{AB} = \hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2$$

$$MS_E = \hat{\sigma}^2$$

$\longrightarrow$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2 = \frac{MS_{AB} - MS_E}{n}$$

$$\hat{\sigma}_{\beta}^2 = \frac{MS_B - MS_{AB}}{cn}$$

$$\hat{\sigma}_{\tau}^2 = \frac{MS_A - MS_{AB}}{dn}$$

מודלים מעורבים.

- חלק מהגורמים אקראיים וחלקם קבועים (לא אקראיים). במקרה הדו-כווני, אחד אקראי ואחד לא.
- דוגמא:
  - אם בדוגמת המדידה (אשר ניתחנו קודם) אין מאות מפעילים אלה בדיוק 3. (נשמור את אותם נתונים אשר ניתחנו קודם).

מודל מעורב (המודל המאולץ).

לא מקרי (קבוע)

$$y_{ikj} = \mu + \tau_i + \tilde{\beta}_k + \widetilde{(\tau\beta)}_{ik} + \tilde{\varepsilon}_{ikj}$$

מקריים

$$i = 1,\ldots,a$$

$$k = 1,\ldots,d$$

$$j = 1,\ldots,n$$

$$Var(\tilde{\beta}_k) = \sigma_\beta^{\ 2}$$

$$Var(\widetilde{(\tau\beta)}_{ik}) = \sigma_{\tau\beta}^{\ 2}$$

$$\sum_{i=1}^{a} \widetilde{(\tau\beta)}_{ik} = 0 \quad k = 1,\ldots,d$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ikj} \sim NID(0,\sigma^2)$$

לכן האינטראקציות הם כבר משתנים מקריים תלויים:

$$Cov[\widetilde{(\tau\beta)}_{ik}, \widetilde{(\tau\beta)}_{i'k}] = -\frac{1}{a}\sigma_{\tau\beta}^{\ 2} \qquad i \neq i'$$

המודל הוא "מאולץ" בגלל שאנחנו מאלצים את סכום האינטראקציות (המקריות) להיות 0.

בקורס הזה **לא** נשתמש במודל המאולץ

מודל מעורב שבו נשתמש (המודל **הלא** המאולץ).

לא מקרי (קבוע)

$$y_{ikj} = \mu + \tau_i + \widetilde{\beta}_k + \widetilde{(\tau\beta)}_{ik} + \widetilde{\varepsilon}_{ikj}$$

מקריים

$$i = 1,\dots,a$$

$$k = 1,\dots,d$$

$$j = 1,\dots,n$$

$$Var(\widetilde{\beta}_k) = \sigma_\beta^{\;2}$$

$$Var(\widetilde{(\tau\beta)}_{ik}) = \sigma_{\tau\beta}^{\;2}$$

אין אילוץ שהמשתנים
המקריים יסתכמו לאפס.
לכן ניתן להניח שהם ב"ת.

$$\cancel{\sum_{i=1}^{a} \widetilde{(\tau\beta)}_{ik} = 0 \quad k = 1,\dots,d}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{ikj} \sim NID(0,\sigma^2)$$

תוחלות של ממוצעי ריבועים... וסטטיסטי F

$$E[MS_A] = \ldots = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^{\ 2} + \frac{dn\sum_{k=1}^{a}\tau_i^{\ 2}}{a-1}$$

$$E[MS_B] = \ldots = \sigma^2 + an\sigma_{\beta}^{\ 2}$$

$$E[MS_{AB}] = \ldots = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^{\ 2}$$

$$E[MS_E] = \ldots = \sigma^2$$

מודל מעורב (B אקראי)

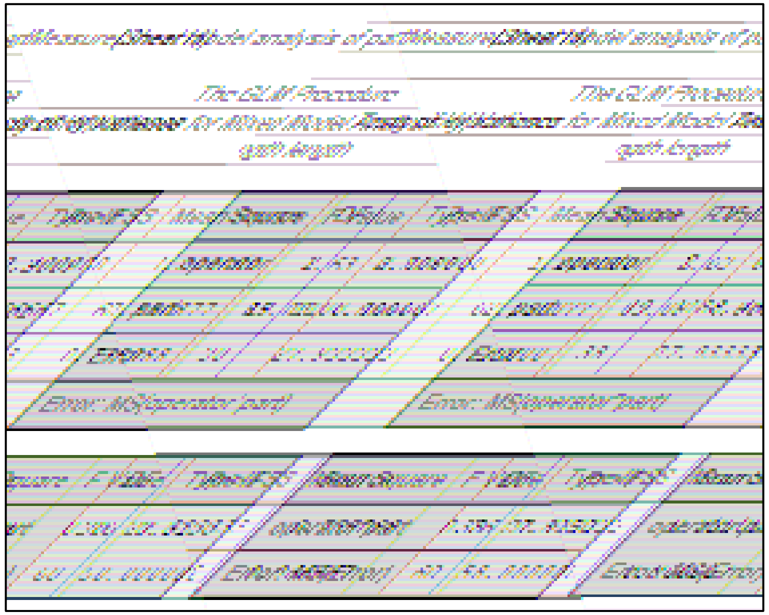
השערה נבדקת:	סטטיסטי F:
$H_0: \ \sigma_{\tau\beta}^{\ 2} = 0$ $H_1: \ \sigma_{\tau\beta}^{\ 2} > 0$	$F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \overset{H_0}{\sim} F_{(a-1)(d-1),\ ab(n-1)}$
$H_0: \ \tau_1 = \ldots = \tau_a = 0$ $H_1: \ otherwise$	$F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}} \overset{H_0}{\sim} F_{a-1,(a-1)(d-1)}$
$H_0: \ \sigma_{\beta}^{\ 2} = 0$ $H_1: \ \sigma_{\beta}^{\ 2} > 0$	$F_0 = \frac{MS_B}{MS_E} \overset{H_0}{\sim} F_{d-1,ad(n-1)}$

ניתוח פלט של המודל המעורב

```
random part operator*part/test;
```

<u>תוספת לפלט עקב פקודת random</u>

Source	Type III Expected Mean Square
operator	Var(Error) + 2 Var(operator*part) + Q(operator)
part	Var(Error) + 2 Var(operator*part) + 6 Var(part)
operator*part	Var(Error) + 2 Var(operator*part)



<u>ללא random</u>

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	59	1218.800000	20.657627	21.37	<.0001
Error	60	58.000000	0.966667		
Corrected Total	119	1276.800000			

R-Square	Coeff Var	Root MSE	length Mean
0.954574	4.389250	0.983192	22.40000

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
operator	2	2.400000	1.200000	1.24	0.2963
part	19	1188.466667	62.550877	64.71	<.0001
operator*part	38	27.933333	0.735088	0.76	0.8150

סיכום סטטיסטי מבחן

גורם	Fixed Model (A and B Fixed)	Random Model (A and B Random)	Mixed Model (A Fixed, B Random)
A	MSA/MSE	MSA/MS_{AB}	MSA/MS_{AB}
B	MSB/MSE	MSB/MS_{AB}	MSB/MSE
A*B	MS_{AB}/MSE	MS_{AB}/MSE	MS_{AB}/MSE